

Buku Statistika Matematika

by Ika Krisdiana

Submission date: 12-Mar-2020 01:12PM (UTC+0700)

Submission ID: 1274164417

File name: 1._Buku_Monograph.pdf (1.86M)

Word count: 15335

Character count: 72567

STATISTIKA MATEMATIKA

BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

Ika Krisdiana
Wasilatul Murtafiah
Titin Masfingatin



UNIPMA Press
WE SCOT IT

**STATISTIKA MATEMATIKA
BERORIENTASI PEMBELAJARAN
BERBASIS RISET**

STATISTIKA MATEMATIKA BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

**IKA KRISDIANA
WASILATUL MURTAFIAH
TITIN MASFINGATIN**



STATISTIKA MATEMATIKA BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

Penulis:

Ika Krisdiana
Wasilatul Murtafiah
Titin Masfingatin

Editor:

Agus

Perancang Sampul:

Ika Krisdiana

Penata Letak:

Titin Masfingatin

Cetakan Pertama, September 2018

Diterbitkan Oleh:

UNIPMA PRESS

Universitas PGRI Madiun

Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118

Telp. (0351) 462986, Fax. (0351) 459400

E-Mail: upress@unipma.ac.id

Website: www.kwu.unipma.ac.id

ISBN:978-602-0725-00-0

Dengan menyebut nama Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, kami panjatkan puja dan puji syukur atas kehadiran-Nya, yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya kepada kami, sehingga kami dapat menyelesaikan pembuatan buku ini dengan tujuan dapat membantu mahasiswa dalam perkuliahan terutama dalam Pembelajaran Berbasis Riset (PBR).

Buku ini telah kami susun dengan maksimal dan mendapatkan bantuan dari berbagai pihak sehingga dapat memperlancar pembuatan buku ini. Untuk itu kami menyampaikan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam pembuatan buku ini.

Terlepas dari semua itu, kami menyadari sepenuhnya bahwa masih ada kekurangan baik dari segi susunan kalimat maupun tata bahasanya. Oleh karena itu kami menerima segala saran dan kritik dari pembaca agar kami dapat memperbaiki buku ini.

Akhir kata kami berharap semoga buku ini dapat memeberikan manfaat maupun inspirasi terhadap pembaca.

Madiun, September 2018

Penyusun

Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii
BAB 1 Peluang	1
1.1 Ruang Sampel.....	1
1.2 Kejadian	2
1.3 Peluang	3
BAB 2 Peubah Acak	5
2.1 Pengertian Peubah Acak	5
2.2 Distribusi Peluang Diskrit	9
2.3 Distribusi Peluang Kontinu	12
2.4 Distribusi Peluang Gabungan	13
2.5 Distribusi Marginal	18
2.6 Distribusi Bersyarat	23
BAB 3 Distribusi Peluang Diskrit	25
3.1 Distribusi Uniform.....	25
3.2 Distribusi Binomial	26
3.3 Distribusi Multinomial	28
3.4 Distrubusi Hipergeometrik	28
3.5 Distribusi Poisson	30
BAB 4 Ekspetasi Matematika	34
4.1 Ekspetasi Matematika	34
4.2 Moment	42

BAB 5 Fungsi Peubah acak	51
5.1 Transformasi Peubah Acak Diskrit Tunggal	51
5.2 Transformasi Peubah Acak Diskrit Gabungan	52
5.3 Transformasi Peubah Acak Kontinu Tunggal	54
5.4 Transformasi Peubah Acak Kontinu Gabungan	55
5.5 Kombinasi Linear Peubah Acak	56
5.6 Populasi	57
5.7 Sampel	58
5.8 Sampel Acak	59
5.10 Rataan Sampel	60
5.11 Median Sampel	61
5.12 Modus Sampel	61
5.13 Rentangan	62
5.14 Keragaman Dalam Sampel	63
5.15 Simpangan Baku	64
5.16 Distribusi Sampel	65
5.17 Distribusi Sampel dari Rataan	65
BAB 6 Taksiran/Pendugaaan	76
6.1 Pendugaan Titik.....	76
6.2 Pendugaan Interval	77
6.3 Pendugaan Interval untuk Mean Populasi	78
6.4 Pendugaan Interval untuk Beda dua Mean Populasi	82
6.5 Dua Sampel Berpasangan	87
6.6 Pendugaan Proporsi	89

6.7 Pendugaan Beda Dua proporsi Populasi	91
6.8 Penudgaan Variansi Populasi	93
6.9 Pendugaan Ratio Dua Variansi Populasi	94
Daftar Pustaka	97

BAB 1

PELUANG

1.1 Ruang Sampel

Dalam mempelajari statistika yang menjadi perhatian kita adalah bagaimana menyajikan dan menafsirkan dari hasil yang berkemungkinan terjadi pada penelitian yang dirancang. Contohnya melemparkan sebuah dadu. Kemungkinan yang muncul dalam pelemparan itu adalah munculnya mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Dalam hal ini dikatakan sebagai percobaan pelemparan sebuah dadu. Percobaan adalah tiap proses yang menghasilkan data mentah. Contoh yang lain adalah pelemparan koin atau mata uang logam, kemungkinan hasil yang muncul dalam kejadian itu adalah muka dan belakang.

9

Definisi 1.1

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang S . Anggota dari suatu ruang sampel disebut titik sampel. Berarti, peristiwa yang mungkin terjadi pada sebuah percobaan disebut titik sampel.

Contoh 1.1

Dalam pelemparan sebuah dadu, tentukan ruang sampelnya!

Penyelesaian:

Sampel S sebagai berikut :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Banyaknya anggota dari ruang sampel $n(S) = 6$

1.2 Kejadian

Definisi 1.2

Kejadian atau peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel S .

Contoh 1.2

Pada pelambungan sebuah dadu, kemungkinan munculnya mata dadu genap adalah

Penyelesaian:

Mata Dadu dimisalkan dengan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sehingga mata dadu genap adalah dimisalkan dengan $A = \{2, 4, 6\}$.

Himpunan A ini merupakan bagian dari ruang sampel S yang diperoleh dari pelambungan sebuah dadu. Himpunan A tersebut adalah contoh dari sebuah kejadian didalam ruang sampel S .

Teorema 1.1

Pada ruang sampel S yang berhingga, banyaknya kejadian pada (didalam) S adalah $2^{n(s)}$.

Contoh teorema 1.1

Pada pelemparan sebuah mata uang, tentukan kemungkinan kejadian yang muncul!

Penyelesaian:

$S = (A, G)$

$K I = (A) ; K II = (G) ; K III = (A, G) ; K IV = (\emptyset)$

$n(S) = 2 \rightarrow n(K) = 2^{n(s)} = 2^2 = 4$

1.3 Peluang

Definisi 1.3

Peluang adalah suatu kemungkinan dari peristiwa yang terjadi. Jika suatu kejadian A yang bersesuaian dengan suatu eksperimen dengan ruang sampel berhingga S yang setiap titik sampelnya berkemungkinan sama untuk terjadi (muncul), maka peluang kejadian A , disajikan dengan $P(A)$ definisikan sebagai berikut :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan :

$P(A)$: Peluang A

$n(A)$: Banyaknya kejadian A

$n(S)$: Banyaknya Anggota ruang sampel A

Contoh 1.3

Pada percobaan melempar sebuah uang koin berisi angka (A) dan gambar (G) dengan sebuah dadu bermata 1 sampai 6 bersama-sama sebanyak satu kali. Berapa peluang munculnya pasangan uang koin sisi gambar dan dadu mata ganjil?

Penyelesaian:

Daftar 1.1

Pelemparan sebuah koin dan dadu

Dadu		1	2	3	4	5	6
Koin							
A		(A,1)	(A,2)	(A,3)	(A,4)	(A,5)	(A,6)
G		(G,1)	(G,2)	(G,3)	(G,4)	(G,5)	(G,6)

5

Banyaknya kejadian munculnya pasangan gambar dan mata dadu ganjil ada 3, yaitu (G,1), (G,3), dan (G,5). Peluang kejadian munculnya pasangan gambar dan mata dadu ganjil adalah :

$$P(\text{gambar dan ganjil}) = \frac{n(\text{gambar dan ganjil})}{n(S)}$$

$$P(\text{gambar dan ganjil}) = \frac{3}{12}$$

BAB 2

PEUBAH ACAK

2.1 Pengertian Peubah Acak

Istilah percobaan telah digunakan untuk menjelaskan setiap proses yang menghasilkan pengukuran yang berkemungkinan. Sering yang menarik perhatian kita bukan titik sampel itu sendiri melainkan hanya gambaran numerik dari hasil. Sebagai contoh, ruang sampel yang memberi gambaran menyeluruh dari tiap hasil yang mungkin bila satu mata uang dilantunkan tiga kali dapat dituliskan sebagai $S = \{MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB\}$. Bila yang diperlukan hanya banyak muka yang muncul, maka hasil numerik untuk (MMM) 3, (MMB) 2, (BMB) 1, (BBB) 0. Bilangan 0,1, 2, dan 3 merupakan pengamatan acak yang ditentukan oleh hasil percobaan. Bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh suatu peubah acak X , yang dalam hal ini menyatakan banyak kali 'muka' yang muncul bila suatu mata uang dilantunkan tiga kali.

Definisi 2.1

3 Suatu fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap anggota dalam ruang sampel disebut suatu peubah acak.

Suatu peubah acak akan dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X , sedangkan harganya dinyatakan dengan huruf kecil yang berpadanan, misalnya x . Dalam contoh lantunan uang diatas, peubah acak X mempunyai nilai 2 untuk semua anggota dalam himpunan bagian $A = \{MMB, MBM, BMM\}$ dari ruang sampel S .

Jadi tiap nilai x yang mungkin menyatakan suatu kejadian yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel percobaan tersebut.

Contoh 2.1

Tiga orang petani : Pak Ali, Badu, dan Cokro emnitipkan pecinya di pagi hari pada seorang anak. Sore harinya si anak mengembalikan peci tersebut secara acak pada ketiga petani. Bila Pak Ali, Badu, dan Cokro dalam urutan seperti itu menerima peci tersebut dari si anak maka tuliskanlah titik sampel untuk semua urutan yang mungkin mendapatkan peci tersebut dan kemudian cari nilai m dari peubah acak M yang mungkin yang menyatakan jumlah urutan yang cocok.

Penyelesaian:

Bila A, B, dan C menyatakan masing-masing peci yang dibagikan berturut pada Pak nAli, Badu, dan Cokro maka jumlah urutan pembagian peci yang mungkin dan urutan yang cocok adalah

Kejadian yang mungkin	⁸⁰ M
ABC	3
ACB	1
BAC	1
BCA	0
CAB	0
CBA	1

Definisi 2.2

3

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskrit dan peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah peubah acak diskrit.

Contoh 2.2

Penelitian mengenai jarak yang ditempuh bila suatu mobil merek tertentu dijalankan pada jalan tertentu dengan 5 liter bensin. Bila dimisalkan jarak sebagai suatu peubah acak yang diukur dengan suatu derajat ketelitian tertentu maka jelas bahwa kemungkinan jarak yang ditempuh dalam ruang sampel tak berhingga banyaknya sehingga tidak mungkin dasamakan dengan banyaknya bilangan bulat.

Definisi 2.3

3

Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu dan peubah acak yang didefinisikan di atasnya disebut peubah acak kontinu

Contoh 2.3:

Bila kita ingin mencatat lamanya waktu yang diperlukan oleh suatu reaksi kimia, maka sekali lagi selang waktu yang dapat dibuat untuk ruang sampel banyaknya takberhingga dan takberhitung.

Peubah Acak Kontinu menyatakan data yang diukur seperti semua tinggi, berat, temperatur, jarak, atau jangka hidup yang mungkin, sedangkan peubah acak diskrit menggambarkan data cacah, seperti banyak barang yang cacat dalam sampel sebesar k barang atau banyak korban meninggal di jalan raya per tahun.

Soal Latihan

1. Carilah distribusi peluang banyaknya pita jazz bila empat pita dipilih secara acak dari suatu kumpulan yang terdiri atas lima pita jazz, dua pita klasik, dan tiga pita lagu daerah. Nyatakanlah hasilnya dalam rumus.
2. Carilah rumus distribusi peluang peubah acak X yang menyatakan hasil yang muncul bila sebuah dadu dilantunkan sekali.
3. Suatu pengiriman enam pesawat televisi berisi dua yang rusak. Sebuah hotel membeli tiga pesawat secara acak dari kelompok tadi. Bila X menyatakan banyaknya pesawat yang rusak yang dibeli hotel tersebut, carilah distribusi peluang X .
4. Suatu uang logam diberati sehingga kemungkinan muncul muka dua kali lebih besar dari pada belakang. Bila uang tersebut dilantunkan tiga kali, carilah distribusi peluang banyaknya muka yang muncul.

2.2 Distribusi Peluang Diskrit

Suatu peubah acak diskrit mendapat tiap nilai dengan peluang tertentu

Definisi 2.4

Fungsi $f(x)$ adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu peubah acak diskret X bila untuk setiap hasil x yang mungkin:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Contoh 2.4

Hitunglah distribusi peluang jumlah bilangan yang muncul bila dua dadu dilantungkan!

Penyelesaian:

Misalkan X peubah acak dengan nilai x , yang menyatakan semua jumlah yang mungkin. Maka x dapat bernilai dari 2 sampai 12. Maka distribusi peluangnya adalah:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Definisi 2.5

Distribusi kumulatif $F(x)$ suatu peubah acak X dengan distribusi peluang $f(x)$ dinyatakan oleh $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$

Contoh 2.5

Carilah distribusi kumulatif untuk jumlah muka bila satu mata uang dilantunkan empat kali!

Penyelesaian:

Karena ada $2^4 = 16$ titik dalam ruang sampel yang berkemungkinan sama maka penyebut untuk semua peluang, jadi juga untuk fungsi distribusi adalah 16. Untuk mencari banyaknya cara memperoleh tiga muka adalah $\binom{4}{3} = 4$ cara. Jadi distribusi peluang $f(x) = P(X = x)$ adalah

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dari rumus distribusi peluang diatas didapatkan:

$f(0) = \frac{1}{16}, f(1) = \frac{1}{4}, f(2) = \frac{3}{8}, f(3) = \frac{1}{4}, f(4) = \frac{1}{16}$. Maka distribusi kumulatifnya adalah:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{bila } x < 0 \\ \frac{1}{16} & \text{bila } 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & \text{bila } 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & \text{bila } 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & \text{bila } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{bila } x \geq 4 \end{cases}$$

Soal Latihan

1. Suatu pengiriman enam pesawat televisi berisi dua yang rusak. Sebuah hotel membeli tiga pesawat secara acak dari kelompok tadi. Bila X menyatakan banyaknya pesawat yang rusak yang dibeli hotel tersebut. Carilah distribusi kumulatif peubah acak X . Dengan menggunakan $F(x)$, carilah
 - a. $P(X=1)$
 - b. $P(0 < X \leq 2)$
2. Suatu uang logam diberati sehingga kemungkinan muncul muka dua kali lebih besar dari pada belakang. Bila uang tersebut dilantunkan tiga kali, carilah distribusi kumulatif peubah acak X yang menyatakan banyak muka yang muncul. Dengan menggunakan $F(x)$, carilah
 - a. $P(1 \leq X < 3)$
 - b. $P(X > 2)$

2.3 Distribusi Peluang Kontinu

Suatu peubah acak kontinu mempunyai peluang nol pada setiap titik x . Karena itu, distribusi peluangnya tidak mungkin disajikan dalam bentuk tabel. Bila x kontinu maka:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a) + P(a < X < b) + P(X = b) \\ &= P(a < X < b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \end{aligned}$$

Definisi 2.6

Fungsi $f(x)$ adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu X yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R bila:

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$

Contoh 2.6

Misalkanlah peubah acak X mempunyai fungsi padat peluang

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ &= 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{aligned}$$

1. Tunjukkan bahwa syarat 2 Definisi 1.6 dipenuhi!

2. Hitung $P(0 < x \leq 1)$

Penyelesaian:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$

2. $P(0 < x \leq 1) = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9}$

Soal Latihan!!

1. Suatu peubah acak X yang dapat memperoleh setiap nilai antara $x = 1$ dan $x = 3$ mempunyai fungsi peluang $f(x) = \frac{1}{2}$.
 - a. Hitunglah $P(2 < X < 2,5)$
 - b. Hitunglah $P(X \leq 1,6)$
 - c. Hitunglah $P(X > 2)$
2. Suatu peubah acak X yang dapat memperoleh setiap harga antara $x = 2$ dan $x = 5$ mempunyai fungsi padat $f(x) = \frac{2(1+x)}{27}$. Hitunglah
 - a. $P(X < 4)$
 - b. $P(3 < X < 4)$

2.4 Distribusi Peluang Gabungan

Bila X dan Y dua peubah acak, distribusi peluang terjadinya secara serentak dapat dinyatakan dengan fungsi $f(x,y)$. Biasanya $f(x,y)$ dinamakan distribusi peluang gabungan X dan Y . Jadi dalam kasus diskrit yang dapat didaftar $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$.

Definisi 2.7

Fungsi $f(x,y)$ adalah fungsi peluang gabungan peubah acak diskrit X dan Y bila

1. $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y)
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \sum_A \sum f(x,y)$ untuk tiap daerah A di bidang xy

Contoh 2.7

Dua kelereng dipilih secara acak dari sebuah kotak berisi 3 kelereng biru, 2 kelereng merah, dan 3 kelereng hijau. Jika X menyatakan kelereng berwarna biru yang terambil, dan Y menyatakan kelereng berwarna merah yang terambil, tentukan

- a. fungsi peluang gabungan $f(x,y)$
- b. $P[(X,Y) \in A]$ jika $A = \{(x,y) \mid x+y \leq 1\}$

Penyelesaian:

Pasangan harga-harga X dan Y adalah $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$

$f(0,0)$ = peluang terambil 2 bola berwarna hijau

$f(1,1)$ = peluang terambil 1 bola berwarna biru dan berwarna merah
,dst.

$$n(S) = 8C_2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

$$f(0,0) = \frac{3C_2}{28} = \frac{3}{28} \quad f(0,1) = \frac{3C_2 \cdot 3C_1}{28} = \frac{6}{28}$$

$$f(1,1) = \frac{3C_1 \cdot 2C_1}{28} = \frac{6}{28} \quad f(0,2) = \frac{2C_2}{28} = \frac{1}{28}$$

$$f(1,0) = \frac{3C_1 \cdot 3C_1}{28} = \frac{9}{28} \quad f(2,0) = \frac{3C_2}{28} = \frac{3}{28}$$

Jadi distribusi peluang gabungan dapat ditulis

X \ Y	Y		
	0	1	2
0	3/28	6/28	1/28
1	9/28	6/28	
2	3/28		

$$\begin{aligned}
 P[X+Y \leq 1] &= P[X=0, Y=0] + P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=0] \\
 &= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) \\
 &= \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{9}{28} = \frac{18}{28}
 \end{aligned}$$

Definisi 2.8

Fungsi $f(x,y)$ adalah fungsi peluang gabungan peubah acak kontinu X dan Y bila

1. $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$

3. $P[(X, Y) \in A] =$

$$\int_A \int f(x, y) dx dy \text{ untuk tiap daerah } A \text{ di bidang } xy$$

Contoh 2.8

Pandang fungsi padat gabungan

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(1 + 3y^2) & , 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{ untuk } x, y \text{ yang lain} \end{cases}$$

a. Tentukan k agar f merupakan fungsi distribusi peluang gabungan

b. Hitung $P[(X, Y) \in A]$ jika $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$

Penyelesaian

a. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$\int_0^1 \int_0^2 kx(1 + 3y^2) dx dy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{k}{2} x^2 (1 + 3y^2) \Big|_0^2 dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} \int_0^1 (4 - 0)(1 + 3y^2) \Big|_0^2 dy = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k(y + y^3) \Big|_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k(2) = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

Jadi agar f merupakan fpg maka $k = \frac{1}{4}$.

b. $P[(X, Y) \in A] = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{4} x(1 + 3y^2) dx dy$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^2 (1 + 3y^2) \Big|_0^1 dy \\
&= \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (1 + 3y^2) dy \\
&= \frac{1}{8} (y + y^3) \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{64} \right) \right] \\
&= \frac{23}{64}
\end{aligned}$$

Soal Latihan

1. Dari suatu bungkus buah-buahan yang berisi tiga jeruk, dua mangga, dan tiga pisang dipilih secara acak empat buah. Bila X menyatakan banyaknya jeruk dan Y banyaknya mangga dalam sampel tersebut, hitunglah

a. Distribusi peluang gabungan X dan Y

b. $P[(X, Y) \in A]$, bila A daerah $\{(x, y) | x + y \leq 2\}$

2. Dua peubah acak mempunyai fungsi padat gabungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= 4xy, & 0 < x < 1, & & 0 < y < 1 \\
&= 0, & & & \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}
\end{aligned}$$

a. Hitunglah peluang bahwa $0 \leq X \leq \frac{3}{4}$ dan $\frac{1}{8} \leq Y \leq \frac{1}{2}$

b. Hitunglah peluang bahwa $Y > X$

3. Dua peubah acak mempunyai fungsi padat gabungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= k(x^2 + y^2), & 0 < x < 2, & & 1 < y < 4 \\
&= 0, & & & \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}
\end{aligned}$$

- Carilah k
- Hitunglah peluang bahwa $1 < X < 2$ dan $2 < Y < 3$
- Hitunglah peluang bahwa $1 \leq X \leq 2$
- Hitunglah peluang bahwa $X + Y > 4$

2.5 Distribusi Marginal

Jika $f(x,y)$ diketahui maka kita dapat mencari distribusi peluang X saja dan Y saja, yaitu :

$$g(x) = \begin{cases} \sum_y f(x,y) & , \text{ jika diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy & , \text{ jika kontinu} \end{cases}$$

yang disebut distribusi marginal X.

Sedangkan distribusi marginal Y

$$h(y) = \begin{cases} \sum_x f(x,y) & , \text{ jika diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx & , \text{ jika kontinu} \end{cases}$$

Contoh 2.9:

Pada contoh 1.7 tentukan:

- Distribusi peluang marginal X
- Distribusi peluang marginal Y

Penyelesaian

$$a. g(x) = \sum_y f(x,y)$$

$$g(0) = \sum_y f(0,y) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2)$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{1}{28} = \frac{10}{28}$$

$$g(1) = \frac{9}{28} + \frac{6}{28} = \frac{15}{28}$$

$$g(2) = \frac{3}{28}$$

disajikan dalam tabel

X	0	1	2
g(x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

a. $h(x) = \sum_x f(x, y)$

$$h(0) = \sum_x f(x, 0) = f(0, 0) + f(1, 0) + f(2, 0)$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{9}{28} + \frac{3}{28} = \frac{15}{28}$$

$$h(1) = \frac{6}{28} + \frac{6}{28} = \frac{12}{28}$$

$$h(2) = \frac{1}{28}$$

disajikan dalam tabel

x	0	1	2
g(x)	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$

Contoh 2.10

Pada contoh 1.8 tentukan:

- a. Distribusi peluang marginal X
- b. Distribusi peluang marginal Y

Penyelesaian

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & , 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{ untuk } x, y \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\text{a. } g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{1}{4}x(1+3y^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}x(y + y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}x, 0 < x < 2$$

$$\text{b. } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}x(1+3y^2)dx$$

$$= (1+3y^2)\frac{1}{8}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1+3y^2), 0 < y < 1.$$

Dari contoh 1.10 ini terlihat bahwa $g(x).h(x) = f(x,y)$, ini dikatakan bahwa **variabel random X dan Y saling bebas**.

Jadi 2 variabel random X dan Y dikatakan saling bebas, jika distribusi peluang gabungannya sama dengan perkalian distribusi peluang marginalnya.

Soal Latihan

1. Misalkan X dan Y mempunyai distribusi peluang gabungan berikut:

x \ y	2	4
1	0,10	0,15
3	0,20	0,30
5	0,10	0,15

Carilah distribusi peluang marginal dan tentukan apakah X dan Y bebas.

2. Diketahui fungsi padat gabungan

$$f(x,y) = \frac{6-x-y}{8}, \quad 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4$$
$$= 0, \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}$$

- Carilah fungsi padat marginal X
- Carilah fungsi padat marginal Y
- Tentukan apakah X dan Y bebas

3. Fungsi padat peluang gabungan peubah acak X dan Y adalah

$$f(x,y) = 2, \quad 0 < x < y < 1$$
$$= 0, \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya.}$$

- Carilah fungsi padat marginal X
- Carilah fungsi padat marginal Y
- Tentukan apakah X dan Y bebas

4. Fungsi padat gabungan peubah acak X dan Y adalah

$$f(x,y) = 6x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x$$
$$= 0, \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}$$

- Carilah fungsi padat marginal X

- b. Carilah fungsi padat marginal Y
 - c. Tunjukkan bahwa X dan Y tidak bebas.
5. Bila X , Y , dan Z mempunyai fungsi padat peluang
- $$f(x, y, z) = kxy^2z, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 2$$
- $$= 0, \quad \text{untuk } x, y, \text{ dan } z \text{ lainnya}$$

Carilah:

- a. Hitunglah nilai k
- b. Fungsi padat marginal X
- c. Fungsi padat marginal Y
- d. Fungsi padat marginal Z
- e. Fungsi padat marginal Y dan Z
- f. Hitunglah $P(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{2}, 1 < Z < 2)$

2.6 Distribusi Bersyarat

Nilai dari variabel random sebenarnya adalah kejadian yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel, sehingga jika A dan B merupakan kejadian yang ditentukan oleh masing-masing $X=x$, $Y=y$, maka dari definisi peluang bersyarat $P(A|B) =$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ didapat}$$

$$P(Y=y | X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

Atau sering ditulis $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$, $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$.

Perhatikan jika X dan Y bebas maka x tidak tergantung y sehingga $f(x|y) = f(x)$

Jadi $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = g(x)$, diperoleh $f(x,y) = g(x).h(y)$.

Contoh 2.11

- Pada contoh 2.9, tentukan $P(X=0 | Y=1)$
- Pada contoh 2.10, tentukan $f(x | Y=y)$

Penyelesaian

a. $P(X=x | Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)}$

$$P(X=0 | Y=1) = \frac{f(0,1)}{h(1)} = \frac{\frac{6}{28}}{\frac{12}{28}} = \frac{1}{2}$$

$$b. \quad f(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{\frac{1}{4}x(1+3y^2)}{\frac{1}{2}x(1+3y^2)} = \frac{1}{2}x, \quad 0 < x < 2.$$

Soal Latihan

1. Dari suatu bungkus buah-buahan yang berisi tiga jeruk, dua mangga, dan tiga pisang dipilih secara acak empat buah. Bila X menyatakan banyaknya jeruk dan Y banyaknya mangga dalam sampel tersebut, hitunglah

a. $f(y|2)$

b. $P(Y = 0 | X = 2)$

2. Diketahui fungsi padat gabungan

$$f(x,y) = \frac{6-x-y}{8}, \quad 0 < x < 2, 2 < y < 4$$

$$= 0, \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}$$

Hitunglah $P(1 < Y < 3 | X = 2)$

3. Fungsi padat peluang gabungan peubah acak X dan Y adalah

$$f(x,y) = 2, \quad 0 < x < y < 1$$

$$= 0, \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya.}$$

Hitunglah $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} | Y = \frac{3}{4})$.

4. Fungsi padat gabungan peubah acak X dan Y adalah

$$f(x,y) = 6x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x$$

$$= 0, \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ lainnya}$$

Hitunglah $P(X > 0,3 | Y = 0,5)$

BAB 3

DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Distribusi peluang diskrit tertentu dapat dinyatakan dalam diagram, dalam bentuk tabel, atau dalam bentuk formula. Bentuk apapun yang dipilih, diharapkan bentuk tersebut dapat menjelaskan karakteristik variabel random yang bersesuaian dengannya. Hal ini berarti variabel variabel random diskrit yang bersesuaian dengan eksperimen statistik tertentu secara esensial dapat dinyatakan dalam satu fungsi peluang yang sama.

Beberapa fungsi distribusi peluang diskrit yaitu distribusi uniform, distribusi binomial, distribusi multinomial, distribusi hipergeometrik, dan distribusi poisson.

3.1. DISTRIBUSI UNIFORM

Distribusi peluang diskrit yang paling sederhana adalah distribusi uniform (seragam). Distribusi tersebut merupakan distribusi variabel random diskrit yang mengasumsikan bahwa semua nilai mempunyai kemungkinan yang sama untuk muncul.

Definisi 3.1

Jika pada variabel random diskrit X nilai-nilai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ mempunyai peluang yang sama, maka variabel random X disebut mempunyai distribusi uniform diskrit jika fungsi peluangnya berbentuk sebagai berikut:

$$f(x; k) = \frac{1}{k}$$

Untuk $X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$

Contoh 3.1

Jika sebuah dadu dilambungkan, maka semua titik sampel di $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mempunyai peluang yang sama untuk muncul, yaitu sebesar $\frac{1}{6}$. Pada kasus ini, diperoleh sebuah distribusi uniform diskrit yang dirumuskan oleh $f(x; 6) = \frac{1}{6}$, untuk $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3.2 **DISTRIBUSI BINOMIAL**

Distribusi binomial adalah suatu percobaan atau eksperimen yang mempunyai dua buah kejadian, yaitu sukses atau gagal.

Eksperimen Binomial umumnya mempunyai 4 syarat, yaitu:

1. Banyaknya eksperimen merupakan bilangan tetap (*fixed number of trial*)
2. Setiap eksperimen mempunyai dua buah hasil yang dikategorikan menjadi sukses atau gagal. Dikatakan sukses apabila sesuai dengan harapan dan keinginan.
3. Probabilitas sukses sama pada setiap eksperimen atau percobaan.
4. Eksperimen tersebut harus bebas (independent) satu sama lain, artinya hasil eksperimen yang satu tidak mempengaruhi lainnya.

Distribusi Binomial dapat dicari dengan rumus:

$$P(x) = P(X=x) = \binom{N}{x} \pi^x (1-\pi)^{N-x}$$

dengan $x = 0, 1, 2, \dots, N$, $0 < \pi < 1$

Contoh 3.2

Pelemparan 10 buah dadu homogen sekaligus. Berapa peluang nampaknya mata 6 sebanyak 8 buah?

Penyelesaian:

$$P(\text{mata 6}) = \pi = \frac{1}{6}$$

$$N = 10$$

$$X = 8$$

$$P(X=x) = \binom{N}{x} \pi^x (1-\pi)^{N-x}$$
$$P(X=8) = \binom{10}{8} \left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$= 0,000015$$

Ini berarti bahwa : dalam undian 10 dadu akan diperoleh mata 6 sebanyak 8 kali, terjadi kira-kira 15 kali dari tiap juta.

3.3. DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Distribusi Multinomial adalah perluasan dari Distribusi Binomial. Bila Distribusi Binomial adalah suatu eksperimen yang mempunyai 2 kejadian, yaitu “berhasil dan gagal”. Sedangkan Distribusi Multinomial adalah suatu eksperimen yang mempunyai 3 atau lebih kejadian, yaitu “berhasil, nyaris berhasil, dan gagal”. Seperti peristiwa keadaan cuaca dapat digolongkan dengan menjadi cerah, mendung, atau hujan.

Misal dalam sebuah eksperimen menghasilkan peristiwa $E_1, E_2, \dots, E_K$ dengan peluang $\pi_1 = P(E_1), \pi_2 = P(E_2), \dots, \pi_K = P(E_K)$

dengan $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_K = 1$. Distribusi Multinomial memberikan probabilitas terjadinya X_1 kali kejadian E_1 , X_2 kali kejadian E_2 , X_K kali kejadian E_K dalam n ulangan yang bebas dengan $X_1 + X_2 + \dots + X_K = n$.

Sehingga probabilitas Distribusi Multinomial dinyatakan:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \pi_1^{x_1} \pi_2^{x_2} \dots \pi_k^{x_k}$$

Contoh 3.3

Dalam pelemparan sebuah dadu sebanyak 12 kali maka tentukan peluang di dapat mata 1, mata 2, ..., mata 6, masing-masing tepat dua kali!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{N!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \pi_1^{x_1} \pi_2^{x_2} \dots \pi_k^{x_k} \\ &= \frac{12!}{2! 2! 2! 2! 2! 2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{479.001.600}{64} \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \\ &= 7484400 \left(\frac{1}{2176782336}\right) \\ &= 0,0034 \end{aligned}$$

3.4. DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Distribusi Hipergeometrik adalah Peluang dari suatu kejadian dari 1 buah populasi yang berukuran N dan diantara N terdapat D buah kategori tertentu dan dari populasi ini diambil berukuran n . Suatu

Distribusi Hipergeometrik dibentuk oleh suatu eksperimen yang memenuhi kondisi-kondisi berikut :

1. Populasi berukuran N (anggotanya terdiri dari N objek)
2. Setiap anggota populasi dapat dinyatakan sebagai sukses atau gagal dan terdapat D buah sukses dalam populasi, jadi $p = D/N$
3. Suatu sample berukuran n (anggotanya terdiri dari n objek) dipilih dari x populasi tanpa penggantian dimana setiap himpunan bagian beranggota n yang dapat dibentuk dari populasi memiliki kesempatan yang sama untuk terpilih menjadi sample.

Distribusi Hipergeometrik dapat dirumuskan dengan :

$$p(x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Dengan $x = 0, 1, 2, \dots, n$ dan faktor – faktor di ruas kanan ditentukan oleh rumus $\binom{N}{x} = \frac{N!}{x!(N-x)!}$

Contoh 3.4

Sekelompok manusia terdiri atas 50 orang dan 3 diantaranya lahir pada tanggal 1 Januari secara acak diambil 5 orang. Berapa peluangnya diantara 5 orang tadi

- a). Tidak terdapat yang lahir tanggal 1 Januari
- b). Terdapat tidak lebih dari seorang yang lahir pada tanggal 1 Januari

Penyelesaian :

- a. Ambil x = banyak orang diantara $n = 5$ yang lahir pada tanggal 1 Januari. Maka dengan $N = 50$, $D=3$, Rumus yang diberikan :

$$p(0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0,724$$

Peluangnya adalah 0,724 bahwa kelima orang itu tidak lahir padatanggal 1 Januari.

- b. Tidak lebih dari seorang yang lahir pada 1 Januari, berarti $x = 0$ dan $x = 1$. $p(0)$ sudah dihitung diatas.

$$p(1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{47}{4}}{\binom{50}{5}} = 0,253$$

Sehingga, peluang paling banyak seorang diantara 5 orang itu yang lahir pada 1 Januari adalah $0,724 + 0,253 = 0.977$

54

3.5. DISTRIBUSI POISSON

Distribusi poisson disebut juga sebagai peristiwa yang jarang terjadi. Distribusi ini dianggap sebagai pendekatan pada distribusi binomial apabila n (banyaknya percobaan) adalah besar, sedangkan P (Probabilitas sukses) sangat kecil.

Distribusi Poisson digunakan untuk menghitung probabilitas terjadinya kejadian menurut satuan waktu ataupun ruang, misalnya sebagai berikut:

- 12
a) banyaknya bakteri dalam satu tetes air atau 1 liter air,

- b) banyaknya rumah terbakar dari 10.000 rumah yang diasuransikan selama bulan Januari,
- c) banyaknya kecelakaan mobil di muka Istana Merdeka selama minggu pertama bulan Agustus,
- d) banyaknya penggunaan telepon per menit,
- e) banyaknya kesalahan ketik per halaman laporan tahunan,
- f) banyaknya pesanan yang masuk per minggu.

Sehingga secara umum kondisi di atas dapat terjadi pula pada setiap proses. Apabila kondisi di atas ditemui dalam suatu kasus maka kita dapat menggunakan rumus distribusi Poisson.

Variabel acak diskrit X dikatakan mempunyai distribusi Poisson jika fungsi peluangnya berbentuk :

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Keterangan :

- P(x) : probabilitas terjadinya suatu kejadian
- e : sebuah bilangan konstan, yaitu 2,7183
- λ : $np =$ rata-rata distribusi
- x : 0,1,2,3, (x menuju tak hingga)

Contoh 3.5

Peluang seseorang akan mendapat reaksi buruk setelah disuntik besarnya 0,0005. Dari 4000 orang yang disuntik, tentukan peluang yang mendapat reaksi buruk:

- a) tidak ada
- b) ada 2 orang

- c) lebih dari 2 orang, dan
- d) tentukan ada berapa orang diharapkan yang akan mendapat reaksi buruk.

Penyelesaian:

- a) Dengan menggunakan pendekatan distribusi Poisson kepada distribusi binom, maka $\lambda = Np = 4000 \times 0,0005 = 2$

Jika X = banyak orang yang mendapat reaksi buruk akibat suntikan itu, maka:

$$p(0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 0,1353$$

- b) Dalam hal ini $\lambda = 2$, sehingga:

$$p(2) = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = 0,2706$$

Peluang ada dua orang mendapat reaksi buruk ialah 0,2706

- c) Yang menderita reaksi buruk lebih dari 2 orang, ini berarti $X = 3, 4, 5, \dots$ tetapi $p(0) + p(1) + p(2) + \dots = 1$, maka $p(3) + p(4) + \dots = 1 - p(0) - p(1) - p(2)$. Harga-harga $p(0)$ dan $p(2)$ sudah dihitung di atas.

$$p(1) = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = 0,2706$$

Peluang yang dicari adalah $1 - (0,1353 + 0,2706 + 0,2706) = 0,3235$.

- d) Ini tiada lain diminta menentukan rata-rata λ .

Di atas sudah dihitung $\lambda = 2$.

Soal Latihan

21

1. Peluang seorang mahasiswa yang baru masuk universitas akan lulus tepat pada waktunya 0,23. Tentukan berapa peluang dari 20 mahasiswa akan lulus tepat waktunya:
 - a. Tidak seorangpun.
 - b. Seorang mahasiswa.
 - c. Paling sedikit seorang.
 - d. Tidak lebih dari seorang.

44

2. Menurut kriteria tertentu, misalkan di masyarakat terdapat 30% keluarga golongan rendah, 50% golongan menengah dan 20% golongan tinggi. Sebuah sampel acak terdiri 20 keluarga telah diambil. Tentukan peluangnya akan terdapat 6 golongan rendah, 10 golongan menengah, dan 4 golongan tinggi.

BAB 4

EKSPETASI MATEMATIKA

Dalam suatu percobaan tentu ada hasil yang diharapkan. Untuk mendapatkan hasil yang baik dan kesimpulan hasil yang akurat, maka percobaan statistika tersebut dilakukan berulang kali. Hal tersebut dimaksudkan untuk memperoleh suatu hasil yang benar-benar mendekati, sehingga kesimpulan yang dihasilkan valid. Ukuran yang menyatakan harapan dari hasil yang dapat diperoleh dari suatu percobaan statistika dinyatakan secara matematis sebagai ekspektasi matematika.

4.1 Ekspektasi Matematik

Definisi 4.1 Ekspektasi Matematika Suatu Peubah Acak

Jika X suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$, maka nilai harapan X atau harapan matematik X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \begin{cases} \sum xf(x) & \text{Jika } X \text{ diskret} \\ \int x \cdot f(x) dx & \text{Jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Contoh 4.1

Tentukan nilai harapan banyaknya wanita dalam panitia yang terdiri dari 3 orang dipih secara acak 4 orang wanita dan 3 orang pria !

Penyelesaian :

Misalkan X menyatakan banyaknya wanita yang terpilih, maka rumus peluang X adalah:

$$f(x) = \frac{\binom{4}{3} \binom{18}{3-x}}{\binom{7}{3}}, x = 0, 1, 2, 3$$

Sehingga, $f(0) = \frac{1}{35}$; $f(1) = \frac{12}{35}$; $f(2) = \frac{18}{35}$; dan $f(3) = \frac{4}{35}$

$$\text{Jadi, } E(X) = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

Ini artinya, bahwa, jika pemilihan tersebut diulang berkali-kali, maka rata-rata wanita terpilih adalah $1\frac{5}{7}$ tiap pemilihan.

Contoh 4.2

Hitunglah nilai harapan peubah acak X yang mempunyai fungsi pada:

$$f(X) = \begin{cases} 2X, & \text{untuk } 0 < X < 1 \\ 0, & \text{untuk } X \text{ lainnya} \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x, 2x dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Soal Latihan!!

1. Suatu pengiriman 7 TV mengandung 2 yang cacat. Suatu hotel membeli secara acak 3 dari padanya. Bila X menyatakan banyaknya yang cacat yang dibeli oleh hotel, carilah nilai harapan X .
2. Tukang cuci mobil dibayar berdasarkan banyaknya mobil yang dicuci. Misalkan bahwa penerimaannya sehari, dalam bentuk ribuan rupiah, 7, 9, 11, 13, 15, atau 17 dengan peluang masing-masing $\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6},$ dan $\frac{1}{6}$. Carilah harapan penghasilan mereka sehari.
3. Dengan membeli sejenis saham tertentu seseorang dapat memperoleh keuntungan setahun sebesar Rp 4.000 dengan peluang 0,3 atau rugi Rp 1.000 dengan peluang 0,7. Berapakah harapan penghasilannya!
4. Bila keuntungan penjual mobil baru satu juta rupiah (dalam satuan) dapat dipandang sebagai peubah acak X yang mempunyai fungsi padat

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah keuntungan rata-rata per mobil.

5. Diketahui distribusi peluang peubah acak X adalah sebagai

$$f(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} \text{ untuk } x = 0, 1, 2, 3,$$

hitunglah $E(X)$!

6. Fungsi padat pengukuran yang telah disandi suatu jenis barang tertentu adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah $E(X)$.

7. Berapa bagian dari orang yang dapat diharapkan akan menjawab tawaran lewat pos bila proporsi X mempunyai fungsi padat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

8. Fungsi padat peubah acak kontinu X , jumlah jam dalam satuan 100 jam, mesin pengisap debu digunakan setahun oleh sebuah keluarga berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah rata-rata jumlah jam setahun keluarga tadi menggunakan mesin tersebut.

Definisi 4.2 Ekspektasi Matematik Suatu Fungsi

Jika X suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$, maka nilai harapan matematik fungsi $g(x)$ dinyatakan sebagai:

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) & \text{Jika } x \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & \text{Jika } x \text{ kontinu} \end{cases}$$

Contoh 4.3

Misalnya X suatu peubah acak dengan distribusi peluang sebagai berikut:

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Hitunglah nilai harapan peubah acak $Y = X + 1$

Penyelesaian:

Karena X peubah acak diskret, maka

$$E[g(x)] = \sum_{x} g(x)f(x) = \sum_{x=0}^3 (x+1)f(x)$$

$$= (0+1)\frac{1}{10} + (1+1)\frac{2}{5} + (2+1)\frac{3}{10} + (3+1)\frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} = \frac{29}{10} = 2,9$$

Contoh4.4**8**

Diketahui X suatu peubah acak dengan fungsi padat peluang

$$f(X) = \begin{cases} \frac{120}{3}, & \text{untuk } -1 < x < 2 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan $g(X)=2X-1$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} E(2x-1) &= \int_{-1}^2 (2x-1) \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (2x^3 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} (16-1) - \frac{1}{3} (8+1) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{15}{2} - 3 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} \right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

Soal Latihan

1. Misalkan X menyatakan hasil yang muncul bila suatu dadu yang setangkup dilantungkan. Hitunglah nilai harapan $g(x) = 3X^2 + 4$.
2. Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang berikut:

X	-3	6	9
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Hitunglah nilai harapan peubah acak $g(X) = (2X + 1)^2$

3. Diketahui distribusi peluang peubah acak diskrit X adalah

$$f(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

Hitunglah nilai harapan peubah acak $g(x) = X^2$.

4. Suatu peubah acak kontinu X mempunyai fungsi padat

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan $g(X) = e^{2x/3}$

5. Bilakeuntungan penjual mobil baru satu juta rupiah (dalam satuan) dapat dipandang sebagai peubah acak X yang mempunyai fungsi padat

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Berapakah nilai harapan $g(X) = X^2$

Definisi 4.3 Ekspektasi Matematika dari Fungsi Peluang Gabungan

Jika X dan Y peubah acak dengan distribusi peluang gabungan $f(x, y)$, maka nilai harapan matematika fungsi $g(X, Y)$ ditentukan oleh:

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y), & \text{Jika } X \text{ dan } Y \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, & \text{Jika } X \text{ dan } Y \text{ kontinu} \end{cases}$$

Contoh 4.5

Distribusi peluang gabungan peubah acak X dan Y sebagai berikut

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$

Hitunglah nilai harapan $g(X, Y) = XY$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xyf(x, y) \\ &= (0)(0)f(0,0) + (0)(1)f(0,1) + (0)(2)f(0,2) + (1)(0)f(1,0) \\ &\quad + (1)(1)f(1,1) + (1)(1)f(1,1) + (1)(2)f(2,1) + (2)(2)f(2,2) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{2+9+4}{18} = \frac{15}{18} \end{aligned}$$

Contoh 4.6

Hitunglah $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ untuk fungsi padat :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{y(1+3y^2)}{4} dx dy = \int_0^1 \frac{y+3y^3}{2} dy = \frac{5}{8}$$

Sifat 4.1 Ekspektasi Matematika

- Jika a dan b konstanta, maka $E(aX+b) = aE(X)+b$
- Jika $a = 0$, maka $E(b)=b$
- Jika $b = 0$, maka $E(aX) = aE(X)$
- $E[g(X)+h(X)] = E[g(X)]+E[h(X)]$
- Jika $g(X,Y) = X$ dan $h(X,Y)=Y$ maka $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- Jika X dan Y dua peubah acak yang bebas, maka $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Bukti: $E(aX+b) = \sum_x (ax+b)f(x) = a \sum_x xf(x) + b \sum_x f(x) = aE(X) + b$ (sifat 2.1a terbukti)

Bukti sifat berikutnya sebagai latihan mahasiswa.

4.2 Moment

Definisi 4.4 Moment Disekitar Pusat

Jika X peubah acak, maka moment disekitar pusat X didefinisikan sebagai $\mu'_k = E(x^k)$.

Jika $k=0$ maka diperoleh $\mu_0' = \sum_x x^0 f(x) = \sum_x f(x) = 1$. Untuk X

diskret, dan $\mu_0' = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ untuk X kontinu.

Sekarang, jika $k=1$, maka

$\mu_1' = \sum_x x f(x) = E(X)$ dan $\mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = E(x)$ yaitu nilai

harapan peubah acak X itu sendiri. Dengan demikian momen pertama di sekitar titik asal suatu peubah acak X ini menyatakan rata-rata peubah acak tersebut. Maka dari itu rata-rata ini ditulis dengan μ_x atau lebih sederhana μ saja. Jadi, $\mu = E(x)$.

Definisi 4.5 Moment Disekitar Rataan

Jika X peubah acak, maka moment disekitar rata-rata X didefinisikan sebagai $\mu_k = E(x - \mu)^k$. Untuk $k=2$ atau momen kedua di sekitar rata-rata, yaitu μ_2 , akan memberikan gambaran pengukuran sekitar rata-rata. Oleh sebab itu untuk selanjutnya μ_2 ini dinamakan variansi peubah acak X dan dinyatakan dengan σ_x^2 atau lebih singkat σ^2 saja. Jadi $\sigma^2 = \mu_2 = E[(X - \mu)^2]$. Akar positif dari variansi ini akan memberikan suatu ukuran yang disebut dengan simpangan baku atau standar deviasi.

Teorema 4.1 Varians

Jika peubah acak bebas, maka $\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$

Bukti:

42

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(x - \mu)^2 = E(x^2 - 2x\mu + \mu^2) = E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2) = E(x^2) - 2\mu\mu + \mu^2 \\ &= E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - [E(x)]^2\end{aligned}$$

Contoh 4.7

Tentukan variansi X , jika X menyatakan banyaknya buah mangga yang harus diambil oleh Dilla dari dalam tas yang berisi 4 mangga dan 3 jeruk, jika dia mengambil 3 buah sekaligus !

Penyelesaian:

17

Distribusi peluangnya adalah :

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

$$E[X] = \sum_x x f(x) = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{24}{7}$$

$$\text{Jadi } \sigma^2 = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

Contoh 4.8

Diketahui fungsi padat peluang peubah acak X dinyatakan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

hitunglah Rataan dan Variansi

Penyelesaian:

46

$$\begin{aligned}E[X] &= 2 \int_1^2 x(x-1) dx = 2 \int_1^2 (x^2 - x) dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = 2 \left(\frac{1}{3} (8 - 10) - \frac{1}{2} (4 - 1) \right) \\ &= 2 \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2} \right) = 2 \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$E[X^2] = 2 \int_1^2 x^2(x-1) dx = \frac{17}{6}$$

Sehingga diperoleh rata-rata $\mu = E(X) = \frac{5}{3}$ dan varians

$$\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Definisi 4.4 Kovarians

Jika X dan Y dua peubah acak bebas dengan rata-rata μ_x dan μ_y ,

maka kovarians peubah acak X dan Y didefinisikan sebagai

$$\sigma_{XY}^2 = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

Teorema 4.2 Kovarians

Jika X dan Y dua peubah acak bebas dengan rata-rata μ_x dan μ_y ,

maka kovarians peubah acak X dan Y dapat ditentukan dengan

$$\sigma_{xy}^2 = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^2 &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y) \\ &= E(XY) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

Contoh 4.9

Dimas mengambil 2 buah pensil secara acak dari sebuah kotak yang berisi tiga pensil warna biru, dua warna merah dan tiga warna kuning. Jika X menyatakan pensil warna biru dan Y warna yang diambil, hitunglah kovariansi dua peubah tersebut!

Penyelesaian:

Distribusi pelang gabungannya sebagai berikut:

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	
2	$\frac{1}{28}$		

Sehingga $E[XY] = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xyf(x,y) = \frac{3}{14}$ (lihat nilai harapan peubah acak

gabungan X dan Y)

$$\mu_x = E[X] = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xf(x,y) = \sum_{x=0}^2 xg(x) = (0)\left(\frac{10}{28}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4} \text{ Jadi}$$

$$\mu_y = E[Y] = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 yf(x,y) = \sum_{y=0}^2 yh(y) = (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{12}{28}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x \mu_y = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{56}$$

Contoh 4.10

Tentukan kovariansi peubah acak X dan Y yang fungsi padat peluang gabungannya dinyatakan sebagai

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & 0 < x < y; 0 < y < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\mu_x = E(X) = \int_0^1 \int_0^y 4y dx dy = \frac{1}{4} \quad \text{dan} \quad E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 4xy dx dy = \frac{1}{2} \quad \text{sehingga}$$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x \mu_y = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{9}$$

Sifat 4.1 Varians

a. Jika X peubah acak dengan distribusi leluang $f(x)$, maka

$$\text{variansi } g(X) \text{ adalah } \sigma_x^2(x) = E\{[g(X) - \mu_g(x)]^2\}$$

b. Jika X suatu peubah acak dan b suatu tetapan, maka

$$\sigma_{x+b}^2 = \sigma_x^2 = \sigma^2$$

c. Jika X suatu peubah acak dan a suatu konstanta, maka

$$\sigma_{ax}^2 = a^2 \sigma_x^2 = a^2 \sigma^2$$

d. Jika X dan Y peubah acak dengan distribusi peluang gabungan

$$f(x,y), \text{ maka } \sigma_{aX+bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + 2ab \sigma_{xy}$$

e. Jika X dan Y penuh acak yang bebas, maka

$$\sigma_{aX-bY}^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2$$

Teorema 4.2 Teori Chebyshev

Peluang bahwa setiap peubah acak X mendapat nilai dalam k simpangan baku dari nilai rata-rata adalah paling sedikit $(1 - \frac{1}{k^2})$ yaitu

$$p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Bukti :

Menurut definisi variansi,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \geq \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx \end{aligned}$$

karena integral $\int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx$ tak negatif. Kemudian $|X - \mu| \geq K\sigma$

dengan $x \geq \mu + k\sigma$ atau $x \leq \mu - k\sigma$ dengan $(X - \mu)^2 \geq k^2 \sigma^2$ dalam

kedua integral lainnya, maka $\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2 \sigma^2 f(x) dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} \sigma^2 f(x) dx$. Jika ruas

kanan dibagi dengan $k^2 \sigma^2$, maka diperoleh $\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x) dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x) dx \leq \frac{1}{k^2}$

sehingga

$$p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x) dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

dengan demikian terbukti teorema Chebyshev.

Contoh 4.11

Suatu peubah acak X mempunyai rata-rata $\mu = 8$, variansi $\sigma^2 = 9$, sedangkan distribusinya tidak diketahui. Hitunglah a. $P(-4 < X < 20)$, dan b. $P(|X - 8| \geq 6)$.

Penyelesaian :

a. Telah diketahui, bahwa $\mu = 8$, variansi $\sigma^2 = 9$, sehingga $\sigma = \sqrt{9} = 3$. yang harus dicari adalah nilai k . Nilai k ini dicari dengan melihat salah satu ujung interval, yaitu -4 atau 20. Berdasarkan teorema Chebyshev diketahui, bahwa

$$p(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x) dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \quad \text{sehingga} \quad \text{dengan}$$

menyelesaikan persamaan ini diperoleh nilai $k=4$. Jadi,

$$P(-4 < X < 20) = P[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)] \geq 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow P(-4 < X < 20) \geq \frac{15}{16}$$

Karena diketahui, bahwa simpangan baku = 3, maka $3k = 6 \Leftrightarrow k = 2$, sehingga : $P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(8 - (2)(3) < X < 8 + (2)(3)) \leq \frac{1}{4}$

$$\text{b. } P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(|X - 8| < 6) = 1 - P(-6 < X - 8 < 6) = 1 - P(8 - 6 < X < 8 + 6)$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah nilai harapan peubah acak X yang mempunyai fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

2. Jika X menyatakan hasil yang muncul jika suatu dadu yang sepasang dilantunkan, hitunglah nilai $E(Y)$, jika $Y=2X^2-5$.
3. Misalkan X dan Y adalah peubah acak dengan fungsi padat gabungan :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai harapan $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$!

4. Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang berikut :

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Hitunglah a) $E(X)$; b. $E(x^2)$; c. $E[(2X+1)^2]$; dan $E\{X-E(X)\}^2$

5. Olid dan Dilla bersama-sama mengambil empat buah-buahan secara acak dari dalam tas yang berisi 3 jeruk, 2 mangga, dan 3 pisang. Jika X menyatakan banyaknya jeruk dan Y banyaknya mangga dalam sampel tersebut, hitunglah kovariansi peubah acak X dan Y .
6. hitunglah kovariansi acak X dan Y yang mempunyai fungsi padat peluang gabungan ; $f(x,y) = x+y$, $0 < X < y$; $0 < y < 1$ dan $f(x,y) = 0$ untuk nilai x dan y lainnya.

7. Misalkan X menyatakan bilangan yang muncul jika sebuah dadu hijau dilantunkan dan Y bilangan yang muncul jika sebuah dadu merah dilantunkan hitunglah variansi peubah acak $a, 2X - Y$; $b. X + 3Y - 5$!
8. Jika X dan Y dua peubah acak bebas dengan variansi $\sigma_x^2 = 5$ dan $\sigma_y^2 = 5$, hitunglah variansi peubah acak $Z = 12X + 4Y - 3$!
9. Diketahui soal no. 9, hitunglah variansinya jika peubah acak X dan Y tak bebas dan $\sigma_{XY} = 1$.

BAB 5

FUNGSI PEUBAH ACAK

Pengkajian yang lebih mendalam tentang penerapan distribusi, baik yang diskret maupun yang kontinu akan dipelajari pada bab ini, termasuk diantaranya keandalan, pengendalian mutu, dan penyampelan penerimaan (*acceptance sampling*)

5.1 Transformasi Peubah Acak Diskrit Tunggal

Teorema 5.1

Misalkan X suatu peubah acak diskret dengan distribusi peluang $f(x)$. Misalkan $Y = u(X)$ suatu transformasi satu-satu antara nilai X dan Y , sehingga persamaan $y = u(X)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x dinyatakan dalam Y , misalnya $x = w(y)$, maka distribusi peluang Y adalah $g(y) = f[w(y)]$.

Contoh 5.1

Diketahui X adalah peubah acak geometrik dengan peluang:

$$f(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{x-1}, \text{ dengan } x = 1, 2, 3, \dots$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2$

Penyelesaian:

Dari soal diketahui bahwa nilai x semuanya positif, transformasi antara nilai x dan y tersebut adalah satu, $y = x^2$ maka $x = \sqrt{y}$

$$\text{Jadi } g(y) = f(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{\sqrt{y}-1} & \text{untuk } y = 1, 4, 9, \dots \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

5.2 Transformasi Peubah Acak Diskret Gabungan

Teorema 5.2

Misalkan X_1 dan X_2 peubah acak diskret dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1, x_2)$. Misalkan lagi $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ dan $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ merupakan suatu transformasi satu-satu antara himpunan titik (X_1, X_2) dan (y_1, y_2) , sehingga persamaan $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ dan $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x_1 dan x_2 dinyatakan dalam y_1 dan y_2 . Misalnya $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ dan $x_2 = w_2(y_1, y_2)$, maka distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 adalah $g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]$.

Transformasi ini sangat berguna untuk menentukan distribusi peubah acak $y_1 = u_1(X_1, X_2)$ peubah acak diskret dengan distribusi peluang $f(x_1, x_2)$. Untuk menentukan distribusi peluang gabungan $g(y_1, y_2)$ cukup dibentuk fungsi kedua misalnya $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ dan (y_1, y_2) dapat dipertahankan. Distribusi Y_1 ini hanyalah distribusi marginal dari $g(y_1, y_2)$ yang dapat diperoleh dengan menjumlahkannya terhadap nilai y_2 . Jika distribusi Y_1 dinyatakan dengan $h(y_1)$, maka distribusinya dapat dinyatakan dengan

$$h(y_1) = \sum_{y_2} g(y_1, y_2)$$

Contoh 5.2:

Diketahui X_1 dan X_2 dua peubah acak bebas yang berdistribusi Poisson, masing-masing berparameter μ_1 dan μ_2 . Jika ditentukan distribusi peubah acak $y_1 = X_1 + X_2$, maka buktikan bahwa peubah acak tersebut berdistribusi Poisson !

Penyelesaian :

Karena X_1 dan X_2 dua peubah acak bebas yang terdistribusi Poisson, maka

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) = \frac{e^{-\mu_1} \mu_1^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\mu_2} \mu_2^{x_2}}{x_2!} = \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^{x_1} \mu_2^{x_2}}{x_1! x_2!},$$

dengan $x_1 = 0, 1, 2, \dots$ dan $x_2 = 0, 1, 2, \dots$

Sekarang dibentuk peubah acak kedua yaitu $y_2 = x_2$. Fungsi balikkannya diberikan oleh $x_1 = y_1 - y_2$ dan $x_2 = y_2$. dengan menggunakan transformasi diperoleh distribusi peluang gabungan

$$y_1 \text{ dan } y_2 \text{ yaitu: } g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^{y_1 - y_2} \mu_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)! y_2!}$$

Dengan $y_1 = 0, 1, 2, \dots$ dan $y_2 = 0, 1, 2, \dots, y_1$

Karena $x_1 = 0, 1, 2, \dots$ maka transformasi $x_1 = y_1 - y_2$ mengakibatkan x_2 dan juga y_2 harus selalu kurang dari atau sama dengan y_1 . Jadi distribusi peluang marginal y_1 adalah :

$$\begin{aligned} h(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{\mu_1^{y_1 - y_2} \mu_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)! y_2!} \\ &= e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1 - y_2)! y_2!} \frac{\mu_1^{y_1 - y_2} \mu_2^{y_2}}{y_1!} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1 - y_2} \mu_2^{y_2} \end{aligned}$$

Karena $\sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2} = (\mu_1 + \mu_2)^{y_1}$, maka diperoleh

$$h(y_1) = \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} (\mu_1 + \mu_2)^{y_1}}{y_1!}, \text{ dengan } y_1 = 0, 1, 2, \dots$$

Dari rumus ini terbukti bahwa jumlah dua peubah acak bebas yang berdistribusi Poisson dengan parameter $\mu_1 + \mu_2$.

5.3 Transformasi Peubah Acak Tunggal Kontinu

Teorema 5.3

Misalkan X satu-satu antara nilai X dan Y , sehingga persamaan $y = u(x)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x dan y , misalnya $x = w(y)$, maka distribusi peluang Y dinyatakan oleh $g(y) = f[w(y)]J$, dengan $J = w'(y)$ dan dinamakan Jacobi transformasi

40

Contoh 5.3

Diketahui X peubah acak kontinu dengan fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & \text{untuk } 1 < x < 5 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = 2X - 3$

Penyelesaian:

Invers dari $y = 2x - 3$ adalah $x = \frac{(y+3)}{2}$, sehingga diperoleh $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$,

sehingga diperoleh. Untuk $x = 1$, maka $y = 2 - 3 = -1$, sedangkan untuk $x = 5$, maka $y = 2(5) - 3 = 7$, dengan menggunakan transformasi di atas, diperoleh :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y+3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{y+3}{4} & \text{Untuk } -1 < y < 7 \\ 0 & \text{Untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

5.4 Transformasi Peubah acak Kontinu Gabungan

Teorema 5.4

Misalkan X_1 dan X_2 peubah acak kontinu dengan distribusi peluang gabungan $f(x_1, x_2)$. Misalkan lagi $y_1 = u_1(X_1, X_2)$ dan $y_2 = u_2(X_1, X_2)$ merupakan suatu transformasi satu-satu antara himpunan titik (x_1, x_2) dinyatakan dalam y_1 dan y_2 . Misalnya $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ dan $x_2 = w_2(y_1, y_2)$, maka distribusi peluang gabungan y_1 dan y_2 adalah $g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]J$. Dengan Jacobi adalah determinan 2×2 , yaitu :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ adalah turunan $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ terhadap y_1 dengan y_2 tetap (turunan parsial x_1 terhadap y_1). Turunan parsial lainnya didefinisikan dengan cara yang sama.

Contoh 5.4

Misalkan X_1 dan X_2 dua peubah acak kontinu dengan fungsi padat peluang gabungan

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & 0 < x_1 < 1; 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

tentukan rumus fungsi untuk $y_1 = x_1^2$ dan $y_2 = x_1x_2$

Penyelesaian :

Invers dari $y_1 = x_1^2$ dan $y_2 = x_1 x_2$ adalah $x_1 = \sqrt{y_1}$ dan $x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$

sehingga diperoleh

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ -\frac{y_2}{2y_1^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

Transformasi ini satu-satu memetakan titik $\{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1 ; 0 < x_2 < 2\}$ ke himpunan $\{(y_1, y_2) | 0 < y_1 < 1; 0 < y_2 < 1\}$.

Dengan menggunakan transformasi di atas, diperoleh distribusi Gabungan yang dinyatakan sebagai berikut:

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} 4\sqrt{y_1} \frac{y_2}{\sqrt{y_1}} \frac{1}{2y_1} = \frac{2y_2}{y_1} & 0 < y_1 < 1; 0 < y_2 < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

5.5 Kombinasi Linear Peubah Acak

Teorema 5.5

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ peubah acak bebas yang berdistribusi normal, masing-masing dengan rata-rata $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ dan variansi $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, maka peubah acak $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu_Y = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n$ dan variansi $\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$

Teorem 5.6

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ Peubah acak bebas yang berdistribusi normal, maka $\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)^2, \left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)^2, \dots, \left(\frac{x_n - \mu}{\sigma}\right)^2$ masing-masing berdistribusi Chi-

Kuadrat dengan derajat kebebasan $V_1, V_2, \dots, V_n$. Selanjutnya peubah acak $Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ akan berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat kebebasan $v = n$.

5.6 Populasi

Definisi 5.1

32

Populasi adalah totalitas semua nilai yang mungkin, hasil menghitung ataupun pengukuran, kuantitatif mengenai karakteristik tertentu dari semua anggota kumpulan yang lengkap dan jelas yang ingin dipelajari sifat-sifatnya.

Banyaknya pengamatan dalam populasi dinamakan ukuran populasi. Jika terdapat 1.500 mahasiswa Universitas PGRI Madiun yang ingin diselidiki motivasinya, maka dikatakan ukuran populasinya 1.500.

8

Tiap pengamatan dalam populasi merupakan suatu nilai dari suatu peubah acak X dengan suatu distribusi peluang $f(x)$. Sebagai contoh, misalnya dalam memeriksa apakah suatu barang yang dihasilkan suatu pabrik cacat atau tidak, tiap pengamatan dalam populasi merupakan nilai peubah acak binomial X dengan nilai 0 atau 1 dengan distribusi peluang $b(x;1,p) = p^x q^{1-x}$, $x = 0,1$ dengan nilai 0 menyatakan barang yang tidak cacat, sedangkan 1 menyatakan barang yang cacat, tidak berubah dari suatu usaha ke usaha lainnya. Untuk selanjutnya, jika disebut "populasi binomial", "populasi normal" atau umumnya "populasi $f(x)$ ", maka yang dimaksud adalah salah satu populasi yang pengamatannya merupakan nilai peubah acak yang berdistribusi binomial, normal,

atau berdistribusi peluang $f(x)$. Jadi rata-rata dan variansi suatu peubah acak yang berdistribusi peluang disebut juga rata-rata dan variansi populasi yang bersangkutan.

5.7 Sampel

Definisi 5.2

108

Sampel adalah suatu himpunan bagian dari populasi

Dalam bidang inferensi statistika (statistika yang mempelajari pengalaman pengumpulan, penyajian, pengolahan data disertai kesimpulan dengan generalisasi), seorang statistikawan ingin menarik kesimpulan mengenai suatu populasi mengenai suatu hal tidak mungkin atau tidak praktis mengamati himpunan semua pengamatan yang membentuk populasi itu. Karena itu, hanya menggunakan sebagian pengamatan yang membentuk populasi itu. Himpunan bagian dari populasi yang betul-betul mewakili semua karakteristik yang ada pada populasi inilah yang disebut sampel. Sering kali kita terdoda dalam mengambil sampel dengan memilih anggota populasi yang paling sesuai dengan keinginan kita. Cara kerja seperti ini dapat menghasilkan inferensi yang keliru tentang populasi.

Setiap prosedur sampling yang menghasilkan inferensi yang konstan menaksir lebih atau konsisten penaksir kurang terhadap suatu parameter populasi dinamakan bias. Untuk mencegah terjadinya bias dalam prosedur sampling, maka sebaiknya menggunakan sampel acak dalam artian bahwa pengamatan dilakukan secara bebas satu sama lain dan acak.

5.8 Sampel acak

Definisi 5.3

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan n peubah acak bebas yang masing-masing berdistribusi peluang $f(x)$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ didefinisikan sebagai sampel acak ukuran n dari populasi $f(x)$ dan distribusi peluang gabungannya ditulis sebagai $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$

Contoh 5.6

Jika dari suatu pabrik dipilih secara acak $n = 8$ bola lampu yang diproduksi dengan ketentuan (keadaan) yang sama, dan kemudian umurnya dicatat, pengukuran pertama x_1 menyatakan nilai x_1 , pengukuran kedua x_2 nilai x_2 , dan seterusnya, maka $x_1, x_2, \dots, x_8$ merupakan nilai sampel acak $x_1, x_2, \dots, x_8$. Jika dianggap populasi umur bola lampu distribusi normal, maka nilai yang mungkin untuk tiap $x_i, i = 1, 2, \dots, 8$, maka tetap sama dengan populasi semula, dan karenanya x_i akan mempunyai distribusi normal yang tetap sama dengan populasi semula, dan karenanya x_i akan mempunyai distribusi normal yang tepat sama dengan X .

5.9 Statistik

Tujuan utama memilih sampel adalah yang mendapatkan keterangan mengenai parameter populasi yang tidak diketahui. Misalkan, kita ingin menarik kesimpulan mengenai proporsi penduduk Indonesia yang menyenangi suatu acara TV dari stasiun tertentu. Akan mustahil, jika kita menanyai semua orang Indonesia dan kemudian menghitung parameter p yang menggambarkan

proporsi sebenarnya. Sebagai gantinya, diambil sampel acak yang banyak dan kemudian dihitung proporsi $\hat{p}$ pada sampel yang menyenangkan suatu acara TV. Nilai $\hat{p}$ ini kemudian dipakai untuk menarik kesimpulan mengenai proporsi p yang sesungguhnya. Sekarang $\hat{p}$ merupakan fungsi dari nilai pengamatan dalam sampel acak karena banyak sampel acak yang dapat diambil dari populasi yang sama, maka tentunya $\hat{p}$ akan berlainan sedikit dari suatu peubah acak yang kita nyatakan dengan $\hat{p}$. Peubah acak seperti ini dinamakan statistik. Jadi, statistik adalah setiap fungsi dari peubah acak yang membentuk suatu sampel acak.

5.10 Rataan Sampel

Definisi 5.4

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan sampel acak ukuran n , maka rata-rata sampel dinyatakan oleh statistik $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Contoh 5.7

Pak Amir memeriksa sampel acak 7 nilai mahasiswa untuk mengetahui prestasinya. Dia mencatat 56, 68, 78, 87, 45, 96, 55 hitunglah rata-rata sampel tersebut!

Penyelesaian:

$n = 7$, maka

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7} = \frac{56 + 68 + 78 + 87 + 45 + 96 + 55}{7} = \frac{485}{7} = 69,286$$

5.11 Median Sampel

Definisi 5.5

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan sampel acak ukuran n , diurutkan membesar menurut besarnya, maka median sampel ditentukan

$$\text{dengan statistik : } \bar{X} = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}} & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}}{2} & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

Contoh 5.8

banyaknya kehadiran mahasiswa pada mata kuliah Statistik Matematika pada semester genap yang dipilih secara acak adalah 8, 3, 9, 5, 6, 8, dan 5. hitunglah Median data sampel tersebut!

Penyelesaian :

Untuk menghitungnya, maka data tersebut harus diurut dari kecil ke besar sebagai berikut 3 5 5 6 8 8 9, karena $n = 7$, maka median adalah $X_{(7+1)/2} = 6$ (X_4 , artinya data pada urutan ke-4).

5.12 Modus Sampel

Definisi 5.6

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$, tidak perlu semuanya berbeda, menyatakan suatu sampel acak ukuran n , maka modus M adalah nilai sampel yang paling sering muncul ataupun yang frekuensinya paling tinggi. Modus mungkin tidak ada, dan walaupun ada mungkin tidak tunggal.

Contoh 5.9:

Jika sumbangan suatu sampel acak penduduk Kelurahan Pancor pada suatu musibah tanah longsor adalah 9, 10, 5, 9, 9, 7, 8, 6, 10 dan 11 ribu rupiah, maka modulusnya adalah $M = \text{Rp. 9.000,-}$ karena nilai yang paling sering muncul adalah 9 ribu rupiah.

Contoh 5.10

Banyaknya judul buku yang dibaca bulan lalu oleh suatu sampel acak 12 mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas PGRI Madiun di perpustakaan Program Studi ⁴¹ dalam sehari tercatat sebagai berikut 2, 0, 1, 2, 4, 2, 5, 4, 0, 1, dan 4. Dalam kasus ini terdapat dua modus, yaitu 2 dan 4, sebab 2 dan 4 muncul paling sering. Distribusi seperti ini disebut dwimodus.

Contoh 5.11

Kadar nikotin suatu sampel acak dari 6 batang rokok merek tertentu adalah 2; 2,7; 2,5; 2,9; 3,1; dan 1,9. distribusi seperti ini tidak mempunyai modus, sebab tiap pengukuran hanya muncul sekali (sama frekuensi kemunculannya).

5.13 Rentangan**Definisi 5.7**

Rentangan dari sampel $x_1, x_2, \dots, x_n$, didefinisikan sebagai statistik $X_{\text{terbesar}} - X_{\text{terkecil}}$ dari terkecil suatu pengamatan

Contoh 5.12:

¹⁰⁷ Suatu sampel acak dari 5 penghuni suatu asrama mahasiswa adalah 108, 112, 127, 118, dan 113. tentukan rentangannya !

Penyelesaian:

$x_{\text{terbesar}} = 127$ dan $x_{\text{terkecil}} = 108$, maka rentangannya $= 127 - 108 = 19$

5.14 Keragaman (variansi) dalam sampel**Definisi 5.8**

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$, sampel acak ukuran n , maka variansi (keragaman) sampel didefinisikan sebagai statistik

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Contoh 5.13

Data sampel 4 orang mahasiswa yang diambil nilainya secara acak pada ujian statistik matematika adalah sebagai berikut: 67, 78, 56, dan 86, hitunglah variansi sampelnya!

Penyelesaian:

$$\bar{X} = \frac{67 + 78 + 56 + 86}{4} = \frac{287}{4} = 71,75$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 &= (67 - 71,75)^2 + (78 - 71,75)^2 + (56 - 71,75)^2 + (86 - 71,75)^2 \\ &= 25,5625 + 39,0625 + 248,0625 + 203,0625 \\ &= 512,75 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{512,75}{3} = 170,917$$

Teorema 5.7

Jika S^2 variansi sampel acak ukuran n , maka dapat ditulis

$$S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n(n-1)}$$

Bukti :

Menurut definisi

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{X}x_i + \bar{X}^2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{X}^2}{n-1}$$

Dengan mengganti $\bar{X}$ dengan $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ dengan mengalikan penyebut dan pembilang dengan n , maka diperoleh rumus perhitungan yang lebih teliti, yakni :

$$S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n(n-1)}$$

5.15 Simpangan Baku (Standar Deviasi)

Definisi 5.9

Simpangan baku sampel, dinyatakan dengan S , didefinisikan sebagai akar positif variansi sampel.

Contoh 5.14

Hitunglah simpangan baku dari contoh nilai mahasiswa di atas

Penyelesaian :

$$S^2 = 170,017 \text{ maka } S = \sqrt{170,017} = 12,074.$$

5.16 Distribusi Sampel

Definisi 5.10

Distribusi peluang suatu statistik disebut distribusi sampel. Simpangan baku distribusi sampel suatu statistik disebut galat baku dari statistik tersebut.

5.17 Distribusi sampel dari Rataan

Teorema 5.8

Jika X rata-ran sampel acak ukuran n diambil dari populasi yang terdistribusi normal dengan rata-ran μ dan variansi σ^2 yang berhingga, maka statistik

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

akan terdistribusi normal dengan rata-ran 0 dan variansi 1

Bukti:

$$X \sim n(x, \mu, \sigma) \Rightarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim n(z, 0, 1)$$

Untuk $x = \bar{X} \Rightarrow \mu_x = \mu_{\bar{X}}$. Karena $\mu_x = E(X) \Rightarrow \mu_{\bar{X}} = E(\bar{X})$

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= \frac{1}{n} [E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)] = \frac{\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \mu_{x_n}}{n} = \mu \end{aligned}$$

Jadi $x = \bar{X} \Rightarrow \mu_{\bar{X}} = \mu$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}}^2 &= E[(\bar{X} - \mu_{\bar{X}})^2] = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 \\
&= E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2\right] - E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right] - \frac{1}{n^2} \left[E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \left[E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right] - \left[E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]^2 \\
&= \frac{\sigma_{\sum x_i}^2}{n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2}{n}\right) = \frac{\sigma_x^2}{n}
\end{aligned}$$

Jadi $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Sehingga diperoleh

$$x = \bar{X} \Rightarrow z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \text{ teorema 6.8 terbukti}$$

Contoh 5.15

Suatu perusahaan memproduksi bola lampu yang umumnya berdistribusi hampir normal dengan rata-rata 800 jam dan simpangan baku 400 jam. Hitunglah peluangnya bahwa suatu sampel acak dengan 16 bola lampu akan mempunyai umur rata-rata kurang dari 755 jam.

Penyelesaian :

Secara hampiran normal, distribusi sampel $\bar{X}$ akan normal dengan $\mu_{\bar{X}} = 800$. dan $\sigma_{\bar{X}} = 40/\sqrt{16} = 10$ Peluang yang dicari diberikan oleh luas daerah yang dihitami pada gambar di bawah ini. Nilai z yang berpadanan dengan $\bar{X} = 755$ adalah

$$Z = \frac{775 - 800}{10} = -2,5 \text{ dan } P(\bar{X} < 755) = p(Z < -2,5) = 0,0062.$$

Contoh 5.16

Diketahui populasi yang berdistribusi seragam diskret

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

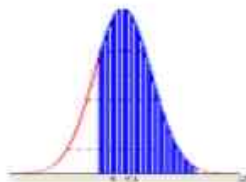
hitunglah peluang bahwa sampel acak berukuran 36, dipilih dengan pengembalian, akan menghasilkan sampel lebih besar dari 1,4 tetapi lebih kecil dari 1,8 bila rata-rata diukur (dibulatkan) sampai persepuluhan terdekat.

Penyelesaian:

Rataan variansi distribusi seragam dihitung dengan menggunakan rumus pada teorema di atas, dan diperoleh

$$\mu = \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{3}{2} \text{ dan}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{5}{4}$$



Gambar 5.1 Kurva normal dengan $\mu = \frac{3}{2}$ dan $\sigma = \sqrt{\frac{5}{4}}$

Distribusi sampai $\bar{X}$ dapat dihampiri distribusi normal dengan

rataan $\mu_{\bar{X}} = \frac{3}{2}$ dan variansi $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5}{16}$. Dengan mengambil

akarnya diperoleh simpangan baku $\sigma_{\bar{X}} = 0,559$. Peluang bahwa $\bar{X}$ lebih besar dari 1,4 tetapi kurang dari 1,8 diberikan oleh luas daerah yang diarsir pada gambar di atas. Keduanya nilai Z yang berpadanan dengan $x_1 = 1,45$ dan $x_2 = 1,75$ adalah

$$z_1 = \frac{1,45 - 1,5}{0,559} = -0,0894$$

$$z_2 = \frac{1,75 - 1,5}{0,559} = 0,4472$$

$$\begin{aligned} P(1,45 < \bar{X} < 1,75) &= P(-0,27 < Z < 1,34) \\ &= P(Z < 1,34) - P(Z < -0,27) \\ &= 0,9099 - 0,3936 \\ &= 0,5163 \end{aligned}$$

Teorema 5.9

Bila sampel bebas ukuran n_1 dan n_2 diambil secara acak dari dua populasi, diskret atau kontinu, masing-masing dengan rata-rata μ_1 dan μ_2 dan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 maka distribusi sampel dari selisih rata-rata $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ berdistribusi hampir normal rata-rata dan variansi diberikan oleh

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{dan} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad \text{sehingga statistik}$$

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{terdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan}$$

varians 1.

Bukti:

33

Jika $x = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \Rightarrow \mu = \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$

$$\mu = E(x) = E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 \Rightarrow \mu = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma^2 = E((x - \mu)^2) = E(x^2) - [E(x)]^2 = E((\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2) - [E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)]^2$$

$$= E(\bar{X}_1^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2 + \bar{X}_2^2) - [E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2)]^2$$

$$= E(\bar{X}_1^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2 + \bar{X}_2^2) - [E(\bar{X}_1)^2 - 2E(\bar{X}_1)E(\bar{X}_2) + E(\bar{X}_2)^2]$$

$$= E(\bar{X}_1^2) - 2E(\bar{X}_1\bar{X}_2) + E(\bar{X}_2^2) - [E(\bar{X}_1)^2 - 2E(\bar{X}_1)E(\bar{X}_2) + E(\bar{X}_2)^2]$$

$$= E(\bar{X}_1^2) - [E(\bar{X}_1)]^2 - 2E(\bar{X}_1\bar{X}_2) + 2E(\bar{X}_1)E(\bar{X}_2) + E(\bar{X}_2^2) - [E(\bar{X}_2)]^2$$

$$= E(\bar{X}_1^2) - [E(\bar{X}_1)]^2 - 2E(\bar{X}_1\bar{X}_2) - 64(\bar{X}_1\bar{X}_2) + E(\bar{X}_2^2) - [E(\bar{X}_2)]^2$$

$$= E(\bar{X}_1 - \mu_{\bar{X}_1}) + 0 + E(\bar{X}_2 - \mu_{\bar{X}_2}) = E(\bar{X}_1 - \mu) + E(\bar{X}_2 - \mu)$$

$$= \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\text{Jadi } \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Akibatnya

18

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{28}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Jadi

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Contoh 5.17

Suatu sampel berukuran $n_1 = 15$ diambil secara acak dari populasi yang berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu_1 = 50$ dan variansi $\sigma_1^2 = 9$, dan rata-rata sampel dihitung. Sampel acak kedua berukuran $n_2 =$

4 diambil, bebas dari yang pertama, dari populasi lain yang juga berdistribusi normal, dengan rata-rata $\mu_2 = 40$ dan variansi $\sigma_2^2 = 4$, dan rata-rata sampel dihitung. Hitunglah $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 8,2)$

Penyelesaian:

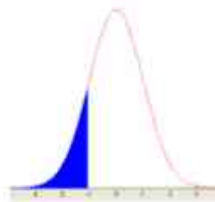
$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 50 - 40 = 10$ dan variansi

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{9}{5} + \frac{4}{4} = 2,8$$

peluang yang dicari dinyatakan oleh luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini. Berpadanan dengan nilai $x_1 - x_2 = 8,2$ diperoleh

$$z = \frac{8,2 - 10}{\sqrt{2,8}} = -1,08,$$

sehingga $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 8,2) = P(Z < -1,08) = 0,1401$



Gambar 5.2 Kurva normal baku dengan $Z < -1.08$

5.18 Distribusi sampel dari $(n-1)S^2/\sigma^2$

Teorema 5.10

Jika peubah acak X terdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 , maka statistik $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ akan terdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $v=n-1$

Bukti:

Telah diketahui bahwa

$$X \sim N(\mu, \sigma, x) \Rightarrow \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 = z^2 \sim \chi^2(1) \text{ dan}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma, x) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

Sekarang diperhatikan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu + \bar{X} - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu))^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{X})^2 + 2(x_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{X} \right) + n(\bar{X} - \mu)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left((n-1)S^2 + 2(\bar{X} - \mu)(n\bar{X} - n\bar{X}) + n(\bar{X} - \mu)^2 \right) \\ &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \frac{(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu))^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \right)^2 \\ &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + z^2 \end{aligned}$$

Karena $\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$ dan $z^2 \sim \chi^2(1)$, maka $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Contoh 5.18

Suatu pabrik baterai mobil menjamin bahwa baterainya akan tahan rata-rata 3 tahun dengan simpangan baku 1 tahun. Jika lima materainya tahun 1,9; 2,4; 3,5; dan 4,2 tahun, apakah pembuatannya masih yakin, bahwa simpangan baku baterai tersebut 1 tahun?

Penyelesaian :

terlebih dahulu dihitung variansi sampel, yaitu :

$$S^2 = \frac{(5)(48,26) - (15)^2}{(5)(4)} = 0,815,$$

$$\text{Kemudian } \chi^2 = \frac{(4)(0,815)}{1} = 3,26$$

merupakan suatu nilai distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan 4. karena 95% nilai χ^2 dengan derajat kebebasan 4 terletak antara 0,484 dan 11,143, maka nilai perhitungan dengan menggunakan $\sigma^2 = 1$ masih wajar, sehingga tidak ada alasan bagi pembuatannya untuk mencurigai bahwa simpangan baku baterainya bukan 1 tahun.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{Untuk } x=1,2,3 \\ 0, & \text{Untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2 + 1$

2. Misal X peubah acak binomial dengan distribusi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{3-x}, & \text{Untuk } x=0,1,2,3 \\ 0, & \text{Untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang peubah acak $Y = X^2 - 1$

3. Misal X_1 dan X_2 peubah acak diskret dengan distribusi multinomial :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \binom{2}{x_1, x_2, 2-x_1-x_2} \left(\frac{1}{4}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2} \left(\frac{5}{12}\right)^{2-x_1-x_2}, & x_1 = 0,1,2 \text{ dan } x_2 = 0,1,2 \\ 0, & x_1 \text{ dan } x_2 \text{ lainnya} \end{cases}$$

Tentukan distribusi peluang gabungan $y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$!

4. Banyaknya jawaban yang salah pada suatu ujian kemampuan salah benar dari suatu sampel 15 murid tercatat sebagai berikut 2, 1, 3, 0, 1, 3, 6, 0, 3, 3, 5, 2, 1, 4, dan 2. Hitunglah
 - a. rataanya
 - b. mediannya
 - c. modulusnya
5. Lamanya waktu menunggu (dalam menit), sebelum di panggil dokter 10 penderita di Puskesmas Sakra adalah sebagai berikut : 5, 11, 9, 5, 10, 15, 6, 10, 5, dan 10. Jika data ini dianggap sebagai sampel acak, hitunglah :
 - a. rentangannya
 - b. simpangan bakunya
6. Buktikan bahwa variansi sampel tidak berubah jika suatu konstanta c ditambahkan atau dikurangi dari setiap nilai dari sampel.
7. Buktikan bahwa variansi sampel menjadi c^2 kali nilai semula, jika setiap pengamatan dalam sampel dikalikan dengan c !
8. Diketahui populasi seragam diskret $f(x,k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{Untuk } x = 2,4,6 \\ 0 & \text{Untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$

Tentuakn peluangnya bahwa suatu sampel acak ukuran 54, diambil dengan pengembalian , akan menghasilkan rataan sampel lebih besar dari 4,1 tetapi kurang dari 4,4, Misalkan bahwa semua rataan di ukur sampai persepuluhan terdekat.

9. Tinggi 1.000 siswa, secara hampiran, berdistribusi normal dengan rata-rata 174,5 cm dan simpangan baku 6,9 cm. Jika diambil 200 sampel acak ukuran 25 dari populasi ini dan semua rata-ratanya dicatat sampai persepuluhan cm terdekat, tentukan:
- Rataan dan galat baku distribusi sampel dari X
 - Banyaknya rata-rata sampel yang jatuh antara 172,5 dan 175 cm
 - Banyaknya rata-rata sampel yang kurang dari 172,0 cm
10. Misalkan X_1 menyatakan rata-rata sampel acak berukuran n_1 , diambil dengan pengembalian, dari populasi diskret

X	1	3	7
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dan misalkan $\bar{X}_2$ menyatakan rata-rata sampel acak ukuran n_2 , diambil dengan pengembalian, dari populasi diskret

X	1	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Jika sampel bebas ukuran $n_1 = 125$ dan $n_2 = 100$ diambil dengan pengembalian, berapakah peluangnya bahwa $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ akan lebih dari 1,84 tetapi kurang dari 2,63 andaikan bahwa rata-rata sampel dapat diukur sampai derajat ketelitian yang diinginkan.

11. Nilai pada suatu ujian masuk yang diberikan pada calon mahasiswa di suatu perguruan tinggi selama lima 5 tahun terakhir pendistribusian hampiran normal dengan rata-rata $\mu =$

74 dan variansi $\sigma^2 = 8$. Apakah nilai $\sigma^2 = 8$ ini masih di anggap valid sebagai nilai variansinya, jika suatu sampel acak sebanyak 20 calon yang mengikuti ujian tersebut tahun ini memperoleh nilai $S^2 = 20$?

12. Buktikan bahwa variansi S^2 untuk sampel acak berukuran n dari populasi normal mengecil jika membesar petunjuk cari dulu variansi $(n - 1) S^2 / \sigma^2$.

BAB 6

TAKSIRAN/PENDUGAAN

23

Inferensi statistik , yaitu pengambilan kesimpulan mengenai populasi berdasarkan hukum statistika , berhubungan dengan persoalan pendugaan parameter dan pengujian hipotesis. Informasi yang relevan dari populasi dapat dinyatakan dengan cara memilih ukuran-ukuran deskriptif yang bersifat numerik yang disebut : parameter.

6.1 Pendugaan Titik

Parameter populasi yang biasanya tidak diketahui nilainya dapat diduga dengan menggunakan statistik sampel. Dalam pendugaan titik , kita tentukan suatu nilai tunggal yang mendekati nilai parameter tersebut. Suatu penduga yang baik adalah penduga yang memenuhi sifat antara lain : tak bias dan paling efisien.

Definisi 6.1

Suatu statistik θ dikatakan penduga tak bias dari parameter θ jika $E(\theta) = \theta$

Contoh 6.1

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ saling bebas , masing-masing mempunyai mean μ dan variansi σ^2 .

Penduga tak bias untuk μ dan σ^2 adalah $\bar{X}$ dan S^2 dimana

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{dan} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Definisi 6.2.

Pandang kelas yang terdiri atas semua penduga tak bias bagi parameter θ . Jika dapat dicari suatu penduga ,misalnya θ^* sehingga variansi θ^* terkecil dibandingkan variansi penduga tak bias yang lain , maka θ^* disebut penduga paling efisien bagi θ .

6.2 Pendugaan Interval

Pada pendugaan titik, parameter yang tak diketahui hanya diduga dengan satu nilai, sehingga kecil kemungkinannya untuk menduga parameter secara tepat. Akan lebih baik bila kita dapat menentukan suatu interval dimana kita berharap bahwa nilai parameter yang sebenarnya akan terletak di dalam interval tersebut.

Suatu dugaan/taksiran interval bagi parameter θ adalah sebuah interval yang berbentuk $\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U$, dimana $\hat{\theta}_L$ dan $\hat{\theta}_U$ bergantung pada statistic $\hat{\Theta}$ dan distribusi sampling dari $\hat{\Theta}$. Karena sampel-sampel yang berbeda akan menghasilkan nilai-nilai yang berbeda bagi $\hat{\Theta}$ dan tentunya juga nilai-nilai dari $\hat{\theta}_L$ dan $\hat{\theta}_U$, sehingga ujung-ujung interval merupakan nilai-nilai dari variable-variabel acak $\hat{\Theta}_L$ dan $\hat{\Theta}_U$. Berdasarkan distribusi sampling dari $\hat{\Theta}$, dapat

ditentukan $\hat{\Theta}_L$ dan $\hat{\Theta}_U$ sehingga $\Pr(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U) = 1 - \alpha$,
dimana $0 < \alpha < 1$. Interval $\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U$ yang dihitung dari sampel
yang terpilih dinamakan interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ bagi θ
, dan $1 - \alpha$ disebut koefisien kepercayaan atau tingkat
kepercayaan.

6.3 Pendugaan Interval untuk Mean Populasi

Definisi 6.3.

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel acak yang diambil dari populasi
berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka mean
sampel $\bar{X}$ akan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi
 σ^2/n , sehingga

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Kita dapat menyatakan :

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan Z diperoleh : $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Jadi, jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n yang
diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 diketahui, maka
interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dalam hal ini jelas bahwa nilai-nilai dari variable random $\hat{\Theta}_L$ dan $\hat{\Theta}_U$ yang dijelaskan sebelumnya, adalah : $\hat{\theta}_L = \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dan $\hat{\theta}_U = \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Sampel yang berbeda akan menghasilkan nilai $\bar{x}$ yang berbeda sehingga taksiran interval bagi bagi parameter μ yang dihasilkan juga akan berbeda.

Definisi 6.4.:

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel acak yang diambil dari populasi berdistribusi sembarang dengan mean μ dan variansi σ^2 . Jika ukuran sampel n cukup besar, mean sampel $\bar{X}$ akan mendekati distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n .

Jadi :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ mendekati distribusi } N_{(0,1)}$$

Dengan cara yang sama pada kasus 1, $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

sehingga $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

7 Jadi, jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n (n besar) yang diambil dari populasi sebarang dengan variansi σ^2 diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah :

11

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Definisi 6.5

Jika pada kasus 2 σ^2 tidak diketahui, asalkan n besar maka melalui suatu penurunan rumus tertentu, diperoleh :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \text{ mendekati distribusi } N_{(0,1)}.$$

7 Sehingga jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n (n besar) yang diambil dari populasi sebarang dengan variansi σ^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Definisi 6.6

Jika sampel berukuran kecil diambil dari populasi normal dimana variansi σ^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan untuk μ dapat diperoleh dengan menggunakan distribusi t .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$P(-t_{\alpha/2; n-1} < t < t_{\alpha/2; n-1}) = 1 - \alpha$$

Sehingga jika $\bar{x}$ adalah mean dari sampel acak berukuran n (n kecil) yang diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - t_{\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Contoh 6.2

- Sebuah mesin minuman ringan diatur sehingga banyaknya minuman yang dikeluarkan berdistribusi normal dengan standar deviasi 1,5 desiliter. Bila suatu sampel acak 36 gelas mempunyai isi rata-rata 22,5 desiliter, tentukan interval kepercayaan 95% untuk rata-rata banyaknya minuman yang dikeluarkan oleh mesin tersebut.

Penyelesaian:

X : banyaknya minuman ringan yang dikeluarkan oleh mesin $X \sim N(\mu, (1.5)^2)$

$$n = 36 ; \sigma = 1,5 ; \bar{x} = 22,5$$

$$(1-\alpha) = 0.95 \rightarrow \alpha = 0,05 ; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22,5 - 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{36}} = 22,01 ; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22,99$$

Jadi interval kepercayaan 95% untuk μ ialah :

$$22,01 < \mu < 22,99$$

2. Suatu sampel acak 8 batang rokok merk tertentu mempunyai kadar nikotin rata-rata 3,6 miligram dan standar deviasi 0,9 miligram. Tentukan interval kepercayaan 99% untuk kadar nikotin rata-rata dari rokok merk tersebut bila diasumsikan kadar nikotin berdistribusi normal.

Penyelesaian:

X : kadar nikotin dan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$n = 8 \quad ; \quad \bar{x} = 3,6 \quad ; s = 0,9$$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \quad ; \quad d.b = n - 1 = 7 \quad ; \quad t_{0,005;7} = 3,499$$

$$\bar{x} - t_{0,005;7} \frac{s}{\sqrt{n}} = 3,6 - 3,499 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{8}} = 2,49 \quad ; \quad \bar{x} + t_{0,005;7} \frac{s}{\sqrt{8}} = 4,71$$

Jadi interval kepercayaan 99% untuk μ ialah :

$$2,49 < \mu < 4,71$$

6.4 Pendugaan Interval untuk Beda Dua Mean Populasi Dua Sampel yang Saling Bebas

Definisi 6.7

Misalkan $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ adalah sampel acak berukuran n_1 dari populasi normal yang mempunyai mean μ_1 dan variansi σ_1^2 .

$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ adalah sampel acak berukuran n_2 dari populasi normal yang mempunyai mean μ_2 dan variansi σ_2^2 .

Dalam hal ini μ_1 dan μ_2 tidak diketahui, sedangkan σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui.

Penduga titik tak bias untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$, sehingga

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Kita dapat menyatakan bahwa $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

Dengan mensubstitusikan Z diperoleh :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 yang diperoleh dari 2 populasi normal yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 , maka interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

Definisi 6.8.

Misalkan $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ adalah sampel acak berukuran n_1 dari populasi sebarang yang mempunyai mean μ_1 dan variansi σ_1^2 . $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ adalah sampel acak berukuran n_2 dari populasi sebarang yang mempunyai mean μ_2 dan variansi σ_2^2 . Jika n_1 dan n_2 besar, maka :

52

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N_{(0,1)}$$

Kita dapat menyatakan bahwa :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan Z diperoleh :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 besar) yang diperoleh dari 2 populasi sebarang yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui, maka interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Definisi 6.9.

58

Jika pada kasus 2, σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui tetapi ukuran sampel n_1 dan n_2 cukup besar, melalui suatu penurunan rumus tertentu,

89

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

Sehingga jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 besar) yang diperoleh dari 2 populasi sebarang yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Defini 6.10

Misalkan $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$: sampel acak dari populasi normal dengan mean μ_1 dan variansi σ_1^2 .

$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$: sampel acak dari populasi normal dengan mean μ_2 dan variansi σ_2^2 .

Ukuran sampel n_1 dan n_2 kecil, σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan kedua sampel saling bebas.

Definisi 6.11

Bila diasumsikan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, maka

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \text{ berdistribusi dengan d.b} = n_1 + n_2 - 2$$

dimana :

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

adalah variansi rata-rata kedua sampel dan merupakan dugaan titik untuk σ^2 .

Kita dapat menyatakan $P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

Dengan mensubstitusikan t , diperoleh :

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 kecil) yang diperoleh dari 2 populasi normal yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui tapi diasumsikan sama, maka interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \quad t_{\frac{\alpha}{2}} : \text{nilai}$$

distribusi t dengan d.b = $n_1 + n_2 - 2$

Definisi 6.12

Bila diasumsikan $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$ mempunyai distribusi yang mendekati

distribusi t dengan d.b = k

dimana

$$k = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}}$$

Jika $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ adalah rata-rata dari dua sampel random yang saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 (n_1 dan n_2 kecil) yang diperoleh dari 2 populasi normal yang saling bebas dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui tapi diasumsikan tidak sama, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$ adalah :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}, k} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}, k} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

6.5 Dua Sampel Berpasangan

Misalkan kita ingin menguji keefektifan suatu diet dengan menggunakan 7 individu yang diamati bobot badannya (dalam kilogram) sebelum dan sesudah mengikuti program diet itu selama 2 minggu. Datanya adalah sebagai berikut :

	1	2	3	4	5	6	7
Bobot Sebelum (X_{1i})	58,5	60,3	61,7	69,0	64,0	62,6	56,7
Bobot Sesudah (X_{2i})	60,0	54,9	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4

Kedua sampel diatas tidak bebas karena pengukuran X_{1i} dan X_{2i} ; $i=1,2,\dots,7$ diambil dari individu yang sama. Prosedur inferensi untuk persoalan ini adalah sebagai berikut: Misalkan dua kelompok variabel acak berdistribusi normal $\{X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}\}$ dan $\{X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}\}$ berelamen sama atau berpasangan. Definisikan n variabel acak baru, yaitu : $D_i = X_{1i} - X_{2i}$; $i=1,2,\dots,n$ Karena X_1 dan X_2 berdistribusi normal, maka D_i juga berdistribusi normal. Jadi $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ merupakan sampel acak berukuran n dari suatu populasi normal dengan mean $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ dan variansi σ_D^2 .

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \quad ; \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2$$

$$-t = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \quad t_{n-1}$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ_D dapat diperoleh dengan menyatakan :

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan t , diperoleh :

$$P\left(\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Jadi interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ_D adalah :

$$\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Contoh 6.12

Lihat data diatas.

	1	2	3	4	5	6	7
Sebelum (x_{1i})	58,5	60,3	61,7	69,0	64,0	62,6	56,7
Sesudah (x_{2i})	60,0	54,9	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4
$d_i = x_{1i} - x_{2i}$	- 1,5	5,4	3,6	6,9	5,5	2,7	2,3

$$\bar{d} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 d_i = 3,5 \quad ; \quad s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 (d_i - \bar{d})^2}{7-1} = 7,7 \quad : \quad s_d = 2,77$$

Dengan $\alpha = 0,05$ diperoleh : $t_{0,025;6} = 2,447$

Jadi interval kepercayaan 95% untuk μ_D adalah :

$$3,5 - (2,447) \frac{2,77}{\sqrt{7}} < \mu_D < 3,5 + (2,447) \frac{2,77}{\sqrt{7}}$$

$$0,94 < \mu_D < 6,06$$

6.6 Pendugaan Proporsi

X suatu variabel binomial (n, p) dengan p tidak diketahui.

Penduga titik bagi proporsi popu- lasi p adalah statistik $\frac{X}{n}$. Jika

ukuran sampel n cukup besar , maka distribusi dari $\frac{X}{n}$ mendekati

7

distribusi normal dengan mean dan variansi : $\mu_{\frac{x}{n}} = p$ dan

$$\sigma_{\frac{x}{n}}^2 = \frac{p(1-p)}{n}$$

Jadi :

$$Z = \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N_{(0,1)}$$

Kita dapat menyatakan bahwa :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Substitusikan $Z = \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$, maka :

$$P\left(\frac{x}{n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Jika ukuran sampel n cukup besar, harga $\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}$ mendekati

$$\frac{p(1-p)}{n}.$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk p adalah

$$\frac{x}{n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} < p < \frac{x}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$$

Contoh 6.13

Dari suatu sampel acak 900 petani disuatu daerah, ternyata 610 orang diantaranya adalah buruhtani. Tentukan interval kepercayaan 90% untuk proporsi buruh tani diantara semua petani didaerah tersebut.

Penyelesaian:

X : banyak buruh tani

$$n = 900 \quad ; \quad X \sim b_{(x,900,p)} \quad ; \quad x = 61$$

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \quad , \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645$$

$$\frac{x}{n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x/n(1-x/n)}{n}} = 0,65 \quad ; \quad \frac{x}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x/n(1-x/n)}{n}} = 0,71$$

$\therefore$ interval kepercayaan 90% untuk p adalah : $0,65 < p < 0,71$

6.7 Pendugaan Beda Dua Proporsi Populasi

Misalkan ada dua populasi binomial dengan proporsi masing-masing p_1 dan p_2 . Dari populasi I diambil sampel acak berukuran n_1 dengan proporsi sampel $\frac{X_1}{n_1}$.

Dari populasi II diambil sampel acak berukuran n_2 dengan proporsi sampel $\frac{X_2}{n_2}$ (X_1 dan X_2 : banyak "sukses")

Sampel acak yang diambil dari kedua populasi cukup besar dan saling bebas.

Penduga titik untuk beda dua proporsi populasi $p_1 - p_2$ adalah

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} .$$

Ukuran sampel n_1 dan n_2 cukup besar, maka distribusi dari $\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$ mendekati normal dengan mean dan variansi :

$$\mu_{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}} = p_1 - p_2 \quad \text{dan} \quad \sigma_{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}^2 = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

Jadi :

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \rightarrow N_{(0,1)} \quad \hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}, \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

$$q_1 = 1 - p_1, \quad q_2 = 1 - p_2$$

Kita dapat menyatakan bahwa :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $(p_1 - p_2)$ adalah :

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}$$

Contoh 6.14:

Disuatu Universitas, diantara 2000 lulusan mahasiswa pria terdapat 114 orang yang lulus dengan $IPK \geq 2,75$, sedangkan diantara 1000 lulusan mahasiswa wanita terdapat 61 orang lulus dengan $IPK \geq 2,75$. Tentukan interval kepercayaan 98% untuk beda proporsi lulusan dengan $IPK \geq 2,75$ antara mahasiswa pria dan wanita.

Penyelesaian:

X : banyaknya mahasiswa yang lulus dengan $IPK \geq 2,75$ $x_1 = 114$

$$, \quad n_1 = 2000, \quad \hat{p}_1 = 0,057, \quad \hat{q}_1 = 0,943$$

$$x_2 = 61 \quad , \quad n_2 = 1000 \quad , \quad \hat{p}_2 = 0,061 \quad , \quad \hat{q}_2 = 0,939 ,$$

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33 \quad , \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = -0,004$$

Interval kepercayaan 98% untuk $p_1 - p_2$: $-0,0254 < p_1 - p_2 < 0,0174$

6.8 Pendugaan Variansi Populasi

Sampel acak berukuran n diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 . Dari sampel acak dapat dihitung variansi sampel S^2 . Interval kepercayaan untuk σ^2 dapat diperoleh dengan menggunakan :

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ yang berdistribusi χ^2 dengan d.b = $n-1$

$$P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan χ^2 diperoleh : $P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}\right] = 1 - \alpha$

Interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk σ^2 adalah :

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}$$

Contoh 6.15

Kita ingin menduga variansi IQ suatu populasi pelajar SMA disuatu daerah M dengan interval kepercayaan 90%. Dari sampel acak 20 orang pelajar, diperoleh variansinya adalah 214,1. Diasumsikan bahwa IQ berdistribusi normal.

Penyelesaian:

X : IQ pelajar SMA di daerah M

$$n = 20 \quad , \quad s^2 = 214,1, \quad \alpha = 0,10 \quad ; \quad \text{d.b} = 20 - 1 = 19 ;$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};19} = \chi^2_{0,05;19} = 30,144 \quad ; \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};19} = \chi^2_{0,95;19} = 10,11$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,05;19}} = \frac{(19)(214,1)}{30,144} = 134,95 \quad ;$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,95;19}} = \frac{(19)(214,1)}{10,117} = 402,09$$

Jadi interval kepercayaan 90% untuk σ^2 adalah : $134,95 < \sigma^2 < 402,09$

6.9 Pendugaan Ratio Dua Variansi Populasi

Misalkan ada dua populasi normal, masing-masing mempunyai variansi σ_1^2 dan σ_2^2 . S_1^2 adalah variansi sampel acak berukuran n_1 yang diambil dari populasi I. S_2^2 adalah variansi sampel acak berukuran n_2 yang diambil dari populasi II. Kedua sampel acak saling bebas. Penduga titik untuk ratio variansi $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ adalah $\frac{S_1^2}{S_2^2}$. Untuk mendapatkan interval kepercayaan untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ kita menggunakan

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$

yang berdistribusi F dengan derajat bebas $\nu_1 = n_1 - 1$ dan $\nu_2 = n_2 - 1$

$$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}} < F < F_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dengan mensubstitusikan F diperoleh :

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, d_1, d_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, d_1, d_2}}\right) = 1 - \alpha \quad ; \quad \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, d_1, d_2}} = F_{\frac{\alpha}{2}, d_2, d_1}$$

Interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ adalah :

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, d_1, d_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}, d_2, d_1} \quad ; \quad v_1 = n_1 - 1, \quad v_2 = n_2 - 1$$

Contoh 6.15:

Suatu eksperimen dilakukan untuk membandingkan kecermatan dua merek detektor merkuri dalam mengukur konsentrasi merkuri diudara. Pada suatu siang hari disuatu daerah tertentu dilakukan pengukuran konsentrasi merkuri , 7 pengukuran dengan detektor merek A dan 6 pengukuran dengan detektor merek B. Diasumsikan bahwa hasil pengukuran berdistribusi normal.

Diperoleh data :

MerekA	0,95	0,96	0,82	0,78	0,71	0,86	0.99
Merek B	0,89	0,91	0,94	0,91	0,90	0,89	

Tentukan interval kepercayaan 90% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ dimana σ_1^2 dan σ_2^2

masing-masing adalah

variansi populasi semua hasil pengukuran dengan detektor merek A dan merek B.

Penyelesaian:

X_1 : hasil pengukuran konsentrasi merkuri dengan menggunakan detektor merek A

X_2 : hasil pengukuran konsentrasi merkuri dengan menggunakan detektor merek B

Dari data dapat dihitung

$$\bar{x}_1 = 0,867 \quad ; \quad s_1^2 = 0,010858 \quad ; \quad \nu_1 = 7 - 1 = 6 \quad \bar{x}_2 = 0,907 \quad ; \\ s_2^2 = 0,000346 \quad ; \quad \nu_2 = 6 - 1 = 5 \quad 1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 .$$

Dari tabel : $F_{0,05;6,5} = 4,95$ dan $F_{0,05;5,6} = 4,39$

Interval kepercayaan 90% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$\frac{0,010858}{0,000346} \left(\frac{1}{4,95} \right) < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{0,010858}{0,000346} (4,39)$$

$$6,3397 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 137,7648$$

- Bain, L.J. dan Engelhardt, 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury Press
- Bickel, P.j. and Doksum, K.A., 1997, *Mathematical Statistics*, Holden-Day, San Fransisco.
- Budiyono, 2009, *Statistika Untuk Penelitian*, UNS PRESS.
- Cassella, G and Berger, R, 1990, *Statistical Inference*, Wadsworth & Brooks/Cole.
- Gut, A., 2005, *Probability: A Graduate Course*, Springer.
- Hogg, R.V., Kean, J.W., Craig A.T., 2005, *Introduction to Mathematical Statistics*, Prentice Hall.
- Larsen, R.J., dan Marx, M.L, 2006, *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*, Perarson International Edition.
- Rohatgi, V.R., 1976, *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley.
- Ronald E Walpole & Raymond H Myers, 1995, *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi ke-4, ITB Bandung.
- Roussas, G., 1973, *A First Course in Mathematical Statistics*, Addison Wesley.
- Shao, J., 1999, *Mathematical Statistics*, Springer.
- Shorack, G.R, 2000, *Probability for Statisticians*, Springer.

STATISTIKA MATEMATIKA

BERORIENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS RISET

Statistika Matematika Berorientasi Pembelajaran Riset difokuskan pada materi peluang, peubah acak, dan distribusi peluang.

Sasaran utama penulisan buku ini adalah mahasiswa Pendidikan Matematika. Statistika dasar dan kalkulus merupakan prasyarat yang diperlukan untuk mempelajari buku ini.



Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi 65 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kww.unipma.ac.id



Buku Statistika Matematika

ORIGINALITY REPORT

19%

SIMILARITY INDEX

17%

INTERNET SOURCES

5%

PUBLICATIONS

5%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	slidegur.com Internet Source	1%
2	jejakpine.blogspot.com Internet Source	1%
3	boyiboyproductionaccounting.blogspot.com Internet Source	1%
4	media.neliti.com Internet Source	1%
5	umyreztuti.blogspot.com Internet Source	<1%
6	statistikdasar.com Internet Source	<1%
7	adisetiawan26.files.wordpress.com Internet Source	<1%
8	a-research.upi.edu Internet Source	<1%
9	Darma Andreas Ngilawajan. "KAJIAN NILAI PELUANG DALAM PERMAINAN GICI-GICI SORONG", BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 2019	<1%

10	brage.bibsys.no Internet Source	<1 %
11	wbac.wimol.ac.th Internet Source	<1 %
12	suhendarencep01.blogspot.com Internet Source	<1 %
13	eprints.uns.ac.id Internet Source	<1 %
14	repository.unikom.ac.id Internet Source	<1 %
15	www.chegg.com Internet Source	<1 %
16	trie.staff.fkip.uns.ac.id Internet Source	<1 %
17	industridikampusgunadarma.blogspot.com Internet Source	<1 %
18	www.fisica.edu.uy Internet Source	<1 %
19	syafii.staff.uns.ac.id Internet Source	<1 %
20	www.rizaldi.web.id Internet Source	<1 %
21	farmakognosi1.blogspot.com Internet Source	<1 %

22	staff.feweb.vu.nl Internet Source	<1 %
23	tutupohosali081175.blogspot.co.id Internet Source	<1 %
24	cs.uno.edu Internet Source	<1 %
25	docslide.us Internet Source	<1 %
26	people.rit.edu Internet Source	<1 %
27	Submitted to University of Sydney Student Paper	<1 %
28	faculty.business.utsa.edu Internet Source	<1 %
29	morianzsmateri.blogspot.com Internet Source	<1 %
30	Submitted to Shanghai Pinghe School Student Paper	<1 %
31	www.pstat.ucsb.edu Internet Source	<1 %
32	Submitted to Sultan Agung Islamic University Student Paper	<1 %
33	repository.tudelft.nl Internet Source	<1 %

34	Internet Source	<1 %
35	nlp.dse.ibaraki.ac.jp Internet Source	<1 %
36	zadoco.site Internet Source	<1 %
37	docobook.com Internet Source	<1 %
38	www.readbag.com Internet Source	<1 %
39	R. Preston McAfee. "Coarse Matching", Econometrica, 2002 Publication	<1 %
40	Submitted to Universitas Muhammadiyah Surakarta Student Paper	<1 %
41	203.160.128.14 Internet Source	<1 %
42	www.hbg-bremen.de Internet Source	<1 %
43	muntohar.files.wordpress.com Internet Source	<1 %
44	documents.tips Internet Source	<1 %
45	lrd.yahooapis.com Internet Source	<1 %

46	www.eng.auburn.edu Internet Source	<1 %
47	s-mat-pcs.oulu.fi Internet Source	<1 %
48	www.ssnpststudents.com Internet Source	<1 %
49	www.hcsnet.edu.au Internet Source	<1 %
50	R.E. Thompson, E.O. Voit, G.I. Scott. "A probabilistic model for predicting distributions of PAH ratios between oysters and marine sediments", Ecological Modelling, 2000 Publication	<1 %
51	namumeantrees.blogspot.com Internet Source	<1 %
52	ocw.nagoya-u.jp Internet Source	<1 %
53	kuva.mis.hiroshima-u.ac.jp Internet Source	<1 %
54	vdocuments.mx Internet Source	<1 %
55	Milas, A.. "Formal differential operators, vertex operator algebras and zeta-values, I", Journal of Pure and Applied Algebra, 20030901 Publication	<1 %
56	www.math.utah.edu	

Internet Source

<1 %

57

www.tetamatika.com

Internet Source

<1 %

58

akhmatmunawar.wordpress.com

Internet Source

<1 %

59

alamsyah.web.id

Internet Source

<1 %

60

ocw.mit.edu

Internet Source

<1 %

61

zombiedoc.com

Internet Source

<1 %

62

www.utdallas.edu

Internet Source

<1 %

63

docslide.net

Internet Source

<1 %

64

Proppe, C.. "Stochastic linearization of dynamical systems under parametric Poisson white noise excitation", International Journal of Non-Linear Mechanics, 200306

Publication

<1 %

65

guarantee.hotgirlsfilm.com

Internet Source

<1 %

66

recanati.tau.ac.il

Internet Source

<1 %

67	Submitted to Imperial College of Science, Technology and Medicine Student Paper	<1 %
68	www.math.nagoya-u.ac.jp Internet Source	<1 %
69	sci2s.ugr.es Internet Source	<1 %
70	N. A. Chernyavskaya, L. A. Shuster. "AN ASYMPTOTIC MAJORANT FOR SOLUTIONS OF STURM–LIOUVILLE EQUATIONS IN $L_P(\mathbb{R})$ ", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2007 Publication	<1 %
71	theochem.chem.rug.nl Internet Source	<1 %
72	mp-w3math.jwu.ac.jp Internet Source	<1 %
73	meryammath09.blogspot.com Internet Source	<1 %
74	yuyunyukentin.blogspot.com Internet Source	<1 %
75	www.dmat.uevora.pt Internet Source	<1 %
76	buycheapprices.com Internet Source	<1 %

77	Simon Sheather. "A Modern Approach to Regression with R", Springer Science and Business Media LLC, 2009 Publication	<1 %
78	Submitted to Syiah Kuala University Student Paper	<1 %
79	Submitted to Scotch College Student Paper	<1 %
80	J. L. Hodges, E. L. Lehmann. "5. Random Variables", Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), 2005 Publication	<1 %
81	w3.im.pwr.wroc.pl Internet Source	<1 %
82	Anisatus Sholiha, Kuzairi Kuzairi, M. Fariz Fadillah Madianto. "Estimator Deret Fourier Dalam Regresi Nonparametrik dengan Pembobot Untuk Perencanaan Penjualan Camilan Khas Madura", Zeta - Math Journal, 2018 Publication	<1 %
83	Friedrich Liese, Klaus -J. Miescke. "Chapter 9 Selection", Springer Science and Business Media LLC, 2007 Publication	<1 %
84	www.quora.com Internet Source	<1 %

85	Submitted to Eastern Mediterranean University Student Paper	<1 %
86	Submitted to University of Leeds Student Paper	<1 %
87	engineering.tufts.edu Internet Source	<1 %
88	paloegada.net Internet Source	<1 %
89	Submitted to Nottingham Trent University Student Paper	<1 %
90	Submitted to Cyprus Academic Library Consortium Student Paper	<1 %
91	ayaaax.blogspot.com Internet Source	<1 %
92	Kyösti Tarvainen. " How to make sure that the error in the term is insignificant when setting up definite integrals ", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1998 Publication	<1 %
93	epdf.tips Internet Source	<1 %
94	text-id.123dok.com Internet Source	<1 %

95	www.berbagaireviews.com Internet Source	<1 %
96	www.unomaha.edu Internet Source	<1 %
97	Angel Serrat. "A Dynamic Equilibrium Model of International Portfolio Holdings", Econometrica, 2001 Publication	<1 %
98	www.math.unb.ca Internet Source	<1 %
99	ratihnoviani-ratih.blogspot.com Internet Source	<1 %
100	WEN-LIANG CHEN, CHUN-SHENG HSU. "Convergence of the block-pulse series solution of a linear distributed parameter system", International Journal of Systems Science, 1987 Publication	<1 %
101	fenenst.ogu.edu.tr Internet Source	<1 %
102	www.bilimadamlari.info Internet Source	<1 %
103	Submitted to Higher Education Commission Pakistan Student Paper	<1 %
104	Gabrielle Demange, Guy Laroque. "Social Security and Demographic Shocks",	<1 %

Econometrica, 1999

Publication

105	toomas-marit.hinnosaar.net Internet Source	<1 %
106	fr.slideshare.net Internet Source	<1 %
107	liyazafira.blogspot.com Internet Source	<1 %
108	Submitted to Universitas Muria Kudus Student Paper	<1 %
109	www.simtech.fr Internet Source	<1 %
110	Submitted to London School of Economics and Political Science Student Paper	<1 %
111	www.intlpress.com Internet Source	<1 %
112	Murray H. Protter, Charles B. Morrey. "Chapter 5 Elementary Theory of Integration", Springer Science and Business Media LLC, 1991 Publication	<1 %
113	rianadis97.blogspot.com Internet Source	<1 %
114	dl.dropboxusercontent.com Internet Source	<1 %

115	www.mathstat.uottawa.ca Internet Source	<1 %
116	www.oocities.org Internet Source	<1 %
117	140.112.44.134 Internet Source	<1 %
118	Submitted to Istanbul Aydin University Student Paper	<1 %
119	Submitted to IUBH - Internationale Hochschule Bad Honnef-Bonn Student Paper	<1 %
120	Submitted to UIN Sultan Syarif Kasim Riau Student Paper	<1 %
121	Joseph G. Altonji, Rosa L. Matzkin. "Cross Section and Panel Data Estimators for Nonseparable Models with Endogenous Regressors", Econometrica, 2005 Publication	<1 %
122	Submitted to Hellenic Open University Student Paper	<1 %
123	Submitted to University of South Africa Student Paper	<1 %
124	Satya R. Chakravarty. "Chapter 1 The Measurement of Income Inequality", Springer Science and Business Media LLC, 2009 Publication	<1 %

125

Submitted to University of Central Florida

Student Paper

<1 %

126

Leonardo Degiorgi. "Fullerenes and carbon derivatives: From insulators to superconductors", Advances in Physics, 1998

Publication

<1 %

127

Submitted to Universitas Nusa Cendana

Student Paper

<1 %

128

Submitted to The Art Institute Online

Student Paper

<1 %

129

G. Heydt, A. Khotanzad, N. Farahbakhshian. "A Method for the Forecasting of the Probability Density Function of Power System Loads", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1981

Publication

<1 %

Exclude quotes

On

Exclude matches

< 3 words

Exclude bibliography

On